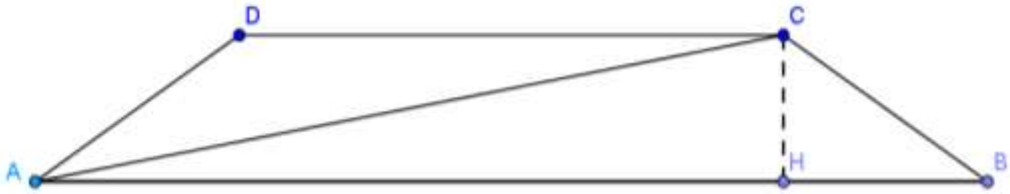
Esercizio 15

In un trapezio isoscele l'altezza è $\frac{4}{15}$ della differenza delle basi, la base minore è $\frac{4}{7}$ della maggiore ed il perimetro è di *288cm*. Determinare l'area del trapezio e la lunghezza delle sue diagonali.

Svolgimento



Prima di decidere come scegliere come incognite scriviamo tutte le relazioni ricavabili dal testo del problema.

$$\overline{CH} = \frac{4}{15}(\overline{AB} - \overline{CD})$$

$$\overline{CD} = \frac{4}{7}\overline{AB}$$

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 288$$

Ma il trapezio è isoscele quindi $\overline{BC} \cong \overline{DA}$:

$$\overline{AB} + 2\overline{BC} + \overline{CD} = 288$$

Scegliamo come incognita la base maggiore. Sostituendo:

$$\overline{AB} = x$$

$$\overline{CD} = \frac{4}{7}x$$

$$\overline{CH} = \frac{4}{15}\left(x - \frac{4}{7}x\right) = \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{7}x = \frac{4}{35}x$$

Ricaviamo il lato obliquo in funzione di *x* dalla relazione del perimetro:

$$x + 2\overline{BC} + \frac{4}{7}x = 288$$

$$2\overline{BC} = 288 - \frac{11}{7}x$$

$$\overline{BC} = 144 - \frac{11}{14}x \quad (1)$$

Per ricavare *x* abbiamo bisogno di ricavare il lato obliquo in un altro modo. Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo *CHB*.

$$\overline{CB} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HB}^2} \quad (2)$$

Ricordando che il trapezio è isoscele:

$$\overline{HB} = \frac{\overline{AB} - \overline{CD}}{2} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{4}{7}x\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}x = \frac{3}{14}x \qquad (3)$$

Sostituendo nella (2):

$$\overline{CB} = \sqrt{\left(\frac{4}{35}x\right)^2 + \left(\frac{3}{14}x\right)^2} = \sqrt{x^2\left[\left(\frac{4}{35}\right)^2 + \left(\frac{3}{14}\right)^2\right]} =$$

$$= x\sqrt{\frac{16}{25 \cdot 49} + \frac{9}{4 \cdot 49}} = x\sqrt{\frac{16 \cdot 4 + 9 \cdot 25}{4 \cdot 25 \cdot 49}} = x\sqrt{\frac{64 + 225}{4 \cdot 25 \cdot 49}} = \frac{x}{2 \cdot 5 \cdot 7}\sqrt{289} = \frac{17}{70}x$$

Sostituendo questo valore nella (1) troviamo un'equazione nell'incognita *x*:

$$\frac{17}{70}x = 144 - \frac{11}{14}x$$

$$\frac{17}{70}x + \frac{11}{14}x = 144$$

$$\frac{17 + 55}{70}x = 144 \quad \rightarrow \quad \frac{72}{70}x = 144$$

$$x = 144 \cdot \frac{70}{72} = 140$$

Per determinare l'area abbiamo bisogno delle due basi e dell'altezza. Base maggiore:

$$\overline{AB} = x = 140cm$$

Base minore:

$$\overline{CD} = \frac{4}{7}x = \frac{4}{7} \cdot 140 = 80cm$$

Altezza:

$$\overline{CH} = \frac{4}{35}x = \frac{4}{35} \cdot 140 = 16cm$$

Area:

$$Area_{ABCD} = \frac{(\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot \overline{CH}}{2} = \frac{(140 + 80) \cdot 16}{2}cm^2 = 1760cm^2$$

Il trapezio è isoscele quindi le sue diagonali sono congruenti. Determiniamo $\overline{AC}$ applicando il teorema di Pitagora al triangolo *ACH*.

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{AH}^2}$$

$$\overline{AH} = \overline{AB} - \overline{HB}$$

Ricordando la (3):

$$\overline{HB} = \frac{3}{14}x = \frac{3}{14} \cdot 140 = 30cm$$

$$\overline{AH} = 140 - 30 = 110cm$$

$$\overline{AC} = \sqrt{16^2 + 110^2} = \sqrt{256 + 12100} = \sqrt{12356} = 111.16cm$$

Matilde Consales