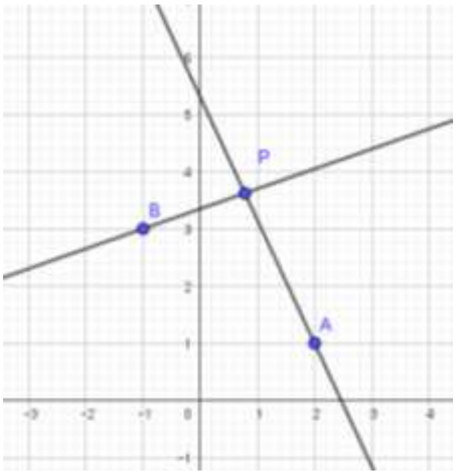
Esercizio 16

Dati i punti *A=(2; 1)* e *B=(-1; 3)*, determinare il luogo geometrico dei punti *P* tali che le rette *PA* e *PB* siano perpendicolari.

Svolgimento



Consideriamo il punto $P = (x_P, y_P)$ e scriviamo l'equazione del fascio proprio di rette con centro *P*:

$$y - y_P = m_{PA}(x - x_P)$$

Tra le rette del fascio troviamo quella passante per il punto *A*:

$$1 - y_P = m_{PA}(2 - x_P)$$

$$m_{PA} = \frac{1 - y_P}{2 - x_P}$$

Equazione della retta *PA*:

$$y = \frac{1 - y_P}{2 - x_P}x - \frac{1 - y_P}{2 - x_P}x_P + y_P$$

Allo stesso modo troviamo la retta passante per *B*:

$$3 - y_P = m_{PB}(-1 - x_P)$$

$$m_{PB} = -\frac{3 - y_P}{1 + x_P}$$

Le due rette sono perpendicolari se:

$$m_{PA} = -\frac{1}{m_{PB}}$$

Sostituendo i valori trovati:

$$\frac{1 - y_P}{2 - x_P} = \frac{1 + x_P}{3 - y_P}$$

$$(1 - y_P)(3 - y_P) = (2 - x_P)(1 + x_P)$$

$$3 - y_P - 3y_P + y_P^2 = 2 + 2x_P - x_P - x_P^2$$

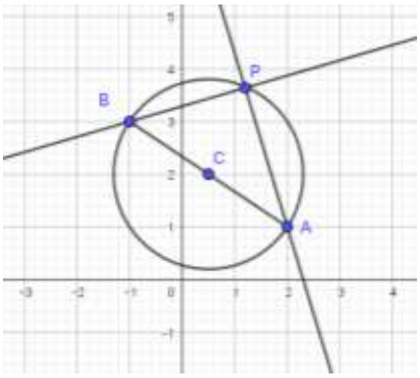
$$x_P^2 + y_P^2 - x_P - 4y_P = -1$$

L'equazione rappresenta una circonferenza di centro $C = (\frac{1}{2}, 2)$. Per calcolare il raggio usiamo la relazione:

$$r^2 - x_C^2 - y_C^2 = -1$$

$$r^2 = -1 + x_C^2 + y_C^2$$

$$r = \sqrt{-1 + \frac{1}{4} + 4} = \frac{\sqrt{-4 + 1 + 16}}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$



Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales