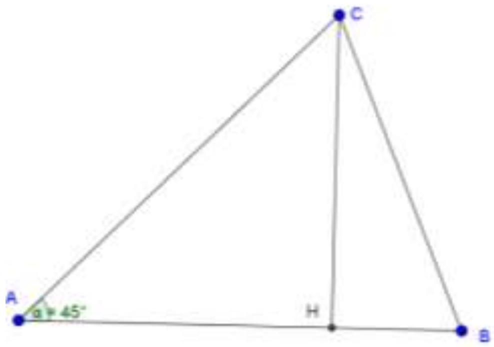
Esercizio 5

Calcolare l'area ed il perimetro del triangolo scaleno ABC, sapendo che l'angolo in A è di 45° e che $\overline{AC} = 6\sqrt{2}cm$ e $\overline{AB} = \frac{7}{5}\overline{BC}$.

Svolgimento

Facciamo la figura con Geogebra:



Poniamo $\overline{BC} = x$. Dal vertice C tracciamo la perpendicolare al lato $\overline{AB}$ e indichiamo con H il punto di intersezione. Consideriamo il triangolo ACH:

- È rettangolo il H per costruzione
- L'angolo $\widehat{CAH}$ è di 45°
- Poiché la somma degli angoli interni di un triangolo è 180° anche $\widehat{ACH}$ è di 45°.
- Il triangolo ACH ha due angoli congruenti e quindi è isoscele. Pertanto i due cateti sono congruenti: $\overline{AH} \cong \overline{CH}$.

Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo ACH possiamo scrivere:

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{CH}^2}$$

Ma $\overline{AH} \cong \overline{CH}$ quindi:

$$\overline{AC} = \sqrt{2\overline{AH}^2} = \sqrt{2}\overline{AH}$$

Sostituendo i valori dati dal testo del problema:

$$6\sqrt{2} = \sqrt{2}\overline{AH} \qquad \rightarrow \qquad \overline{AH} \cong \overline{CH} = 6cm$$

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo CHB per trovare $\overline{HB}$:

$$\overline{HB} = \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{CH}^2}$$

Sostituendo i valori che conosciamo:

$$\overline{HB} = \sqrt{x^2 - 6^2} = \sqrt{x^2 - 36}$$

Sappiamo che:

$$\overline{AB} = \overline{AH} + \overline{HB} \qquad e \qquad \overline{AB} = \frac{7}{5}x$$

Sostituiamo i valori che conosciamo:

$$\frac{7}{5}x = 6 + \sqrt{x^2 - 36}$$

Abbiamo appena scritto un'equazione che ci permette di trovare il valore di *x*.

$$\frac{7}{5}x - 6 = \sqrt{x^2 - 36}$$

Eleviamo ambo i membri al quadrato:

$$\left(\frac{7}{5}x - 6\right)^2 = x^2 - 36 \quad \rightarrow \quad \frac{49}{25}x^2 - \frac{84}{5}x + 36 - x^2 + 36 = 0$$

$$\frac{24}{25}x^2 - \frac{84}{5}x + 72 = 0 \quad \rightarrow \quad 24x^2 - 420x + 1800 = 0$$

$$12(2x^2 - 35x + 150) = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 35x + 150 = 0$$

$$x_{1-2} = \frac{35 \pm \sqrt{35^2 - 4 \cdot 2 \cdot 150}}{4} = \frac{35 \pm \sqrt{1225 - 1200}}{4} = \frac{35 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{35 \pm 5}{4}$$

$$x_1 = \frac{40}{4} = 10 \quad x_2 = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$$

Tutte e due le soluzioni sono accettabili. Ci sono due triangoli che soddisfano le condizioni del problema.
Consideriamo la prima soluzione:

$$x = 10 \quad \overline{BC} = 10cm \quad \overline{AB} = \frac{7}{5}10 = 14cm$$

$$Area: \ \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CH} = \frac{1}{2}14 \cdot 6cm^2 = 42cm^2$$

$$Perimetro: \ \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = \left(14 + 10 + 6\sqrt{2}\right)cm = \left(24 + 6\sqrt{2}\right)cm = 6\left(4 + \sqrt{2}\right)cm$$

Consideriamo la seconda soluzione:

$$x = \frac{15}{2} \quad \overline{BC} = \frac{15}{2}cm \quad \overline{AB} = \frac{7}{5}\frac{15}{2} = \frac{21}{2}cm$$

$$Area: \ \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CH} = \frac{1}{2}\frac{21}{2} \cdot 6cm^2 = \frac{21}{4} \cdot 6cm^2 = \frac{63}{2}cm^2$$

$$Perimetro: \ \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = \left(\frac{21}{2} + \frac{15}{2} + 6\sqrt{2}\right)cm = \left(\frac{36 + 12\sqrt{2}}{2}\right)cm = 6\left(3 + \sqrt{2}\right)cm$$

Matilde Consales