Esercizio 1:
Calcolare l'integrale del campo vettoriale:

$$F(x, y, z) = (2x + 4y + 3z, -4y^2 + 5z, x^2 - 6y + 3z)$$

Lungo la curva intersezione delle due superfici:

$$z = 3xy \qquad x^2 + y^2 = 6$$

Orientata in senso antiorario se vista dall'alto.

Svolgimento:
Sia C la curva intersezione dell'iperboloide $z = 3xy$ e del cilindro $x^2 + y^2 = 6$ (il cilindro ha come base un cerchio sul piano xy di centro $O \equiv (0, 0)$ e raggio $\sqrt{6}$). Sia S il grafico della funzione $\varphi(x, y) = 3xy$ definita per $x^2 + y^2 \leq 6$. Calcoliamo l'integrale usando il teorema di Stokes:

$$\int_{C^+} \boldsymbol{F} dx = \int_{S^+} \boldsymbol{rotF} * \boldsymbol{n} dA$$

Calcoliamo il rotore del campo vettoriale:

$$\boldsymbol{rotF} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x + 4y + 3z & -4y^2 + 5z & x^2 - 6y + 3z \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1}\left(\frac{\partial(x^2-6y+3z)}{\partial y} - \frac{\partial(-4y^2+5z)}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + (-1)^{1+2}\left(\frac{\partial(x^2-6y+3z)}{\partial x} - \frac{\partial(2x+4y+3z)}{\partial z}\right)\boldsymbol{j} + (-1)^{1+3}\left(\frac{\partial(-4y^2+5z)}{\partial x} - \frac{\partial(2x+4y+3z)}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} =$$

$$= (-6 + 5)\boldsymbol{i} - (2x - 3)\boldsymbol{j} + (0 - 4)\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{i} - (2x - 3)\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$$

Troviamo ora il versore normale alla superficie S. Un vettore ortogonale a S è dato da:

$$N(x, y, z) = \left(-\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x}, -\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y}, 1\right) = (-3x, -3y, 1)$$

Il versore **n** è:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{N}}{\|\boldsymbol{N}\|}$$

dove

$$\|\boldsymbol{N}\| = \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2} = \sqrt{(-3x)^2 + (-3y)^2 + 1^2} = \sqrt{9x^2 + 9y^2 + 1}$$

quindi:

$$\boldsymbol{n} = \left(\frac{-3x}{\sqrt{9x^2 + 9y^2 + 1}}, \frac{-3y}{\sqrt{9x^2 + 9y^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{9x^2 + 9y^2 + 1}}\right)$$

Calcoliamo adesso il prodotto scalare:

$$\boldsymbol{rotF} * \boldsymbol{n} = (-1, -2x+3, -4) * \left(\frac{-3x}{\sqrt{9x^2+9y^2+1}}, \frac{-3y}{\sqrt{9x^2+9y^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{9x^2+9y^2+1}} \right) =$$

$$= \frac{3x}{\sqrt{9x^2+9y^2+1}} + \frac{(-2x+3)(-3y)}{\sqrt{9x^2+9y^2+1}} + \frac{-4}{\sqrt{9x^2+9y^2+1}} = \frac{3x+6xy-9y-4}{\sqrt{9x^2+9y^2+1}}$$

A questo punto possiamo calcolare l'integrale:

$$\int_{C^+} \boldsymbol{F}dx = \int_{\{x^2+y^2 \leq 6\}} \frac{3x+6xy-9y-4}{\sqrt{9x^2+9y^2+1}} dxdy$$

Conviene usare le coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \end{cases} \quad dxdy = \rho d\rho d\theta \quad \begin{cases} 0 \leq \rho \leq \sqrt{6} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Sostituendo trovo la funzione integranda:

$$f(\rho,\theta) = \frac{3\rho cos\theta + 6\rho cos\theta \rho sin\theta - 9\rho sin\theta - 4}{\sqrt{9\rho^2 cos^2\theta + 9\rho^2 sin^2\theta + 1}} = \frac{3\rho cos\theta + 6\rho cos\theta \rho sin\theta - 9\rho sin\theta - 4}{\sqrt{9\rho^2(cos^2\theta + sin^2\theta) + 1}}$$

$$f(\rho,\theta) = \frac{3\rho cos\theta + 6\rho cos\theta \rho sin\theta - 9\rho sin\theta - 4}{\sqrt{9\rho^2+1}}$$

Calcoliamo l'integrale:

$$\int_0^{\sqrt{6}} \int_0^{2\pi} \frac{3\rho cos\theta + 6\rho cos\theta \rho sin\theta - 9\rho sin\theta - 4}{\sqrt{9\rho^2+1}} \rho d\rho d\theta =$$

$$= 3\int_0^{\sqrt{6}} \frac{\rho^2}{\sqrt{9\rho^2+1}} d\rho \int_0^{2\pi} cos\theta d\theta + 6\int_0^{\sqrt{6}} \frac{\rho^3}{\sqrt{9\rho^2+1}} d\rho \int_0^{2\pi} cos\theta sin\theta d\theta +$$

$$-9\int_0^{\sqrt{6}} \frac{\rho^2}{\sqrt{9\rho^2+1}} d\rho \int_0^{2\pi} sin\theta d\theta - 4\int_0^{\sqrt{6}} \frac{\rho}{\sqrt{9\rho^2+1}} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta$$

Calcoliamo separatamente i quattro addendi.

Primo addendo:

$$3\int_0^{\sqrt{6}} \frac{\rho^2}{\sqrt{9\rho^2+1}} d\rho \int_0^{2\pi} cos\theta d\theta = 3\int_0^{\sqrt{6}} \frac{\rho^2}{\sqrt{9\rho^2+1}} \left[sin\theta \Big|_0^{2\pi} \right] d\rho = 3\int_0^{\sqrt{6}} \frac{\rho^2}{\sqrt{9\rho^2+1}} (\sin(2\pi) - \sin(0)\, d\rho =$$

$$= 3\int_0^{\sqrt{6}} \frac{\rho^2}{\sqrt{9\rho^2+1}} 0 d\rho = 0$$

Secondo addendo:

$$6\int_0^{\sqrt{6}} \frac{\rho^3}{\sqrt{9\rho^2+1}} d\rho \int_0^{2\pi} cos\theta sin\theta d\theta = 0$$

Infatti se calcoliamo l'integrale per sostituzione t=cosθ dt=sinθdθ.

Estremi di integrazione: se θ=0 t=cos0=1; se θ=2π t=cos(2π)=1. Gli estremi di integrazione coincidono quindi l'integrale è nullo.

Terzo addendo:

$$-9\int_0^{\sqrt{6}} \frac{\rho^2}{\sqrt{9\rho^2+1}} d\rho \int_0^{2\pi} sin\theta d\theta = -9\int_0^{\sqrt{6}} \frac{\rho^2}{\sqrt{9\rho^2+1}} \left[-cos\theta\Big|_0^{2\pi}\right] d\rho =$$

$$= -9\int_0^{\sqrt{6}} \frac{\rho^2}{\sqrt{9\rho^2+1}} [-(\cos(2\pi) - cos0)] d\rho = -9\int_0^{\sqrt{6}} \frac{\rho^2}{\sqrt{9\rho^2+1}} [1-1] d\rho = 0$$

Quarto addendo:

$$-4\int_0^{\sqrt{6}} \frac{\rho}{\sqrt{9\rho^2+1}} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = -4\int_0^{\sqrt{6}} \frac{\rho}{\sqrt{9\rho^2+1}} \left(\theta\Big|_0^{2\pi}\right) d\rho = -4\int_0^{\sqrt{6}} \frac{\rho}{\sqrt{9\rho^2+1}} (2\pi - 0) d\rho =$$

$$= -4\int_0^{\sqrt{6}} \frac{\rho}{\sqrt{9\rho^2+1}} 2\pi d\rho = -8\pi \int_0^{\sqrt{6}} \frac{\rho}{\sqrt{9\rho^2+1}} d\rho$$

Calcoliamo l'integrale per sostituzione ponendo

$$t = 9\rho^2 + 1 \;\; dt = 18\rho d\rho \quad \rho d\rho = \frac{1}{18} dt$$

Estremi di integrazione:

$$se\ \rho = 0 \ \rightarrow t = 1 \qquad se\ \rho = \sqrt{6} \ \rightarrow \ t = 9 * 6 + 1 = 55$$

$$-8\pi \int_0^{\sqrt{6}} \frac{\rho}{\sqrt{9\rho^2+1}} d\rho = -8\pi * \frac{1}{18}\int_1^{55} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = -\frac{4}{9}\pi\left(-\frac{1}{2}t^{\frac{-3}{2}}\Big|_1^{55}\right) = -\frac{4}{9}\pi\left(-\frac{1}{2t\sqrt{t}}\Big|_1^{55}\right) =$$

$$= -\frac{4}{9}\pi\left(-\left(\frac{1}{110\sqrt{55}} - 1\right)\right) = -\frac{4}{9}\pi\left(\frac{-1+110\sqrt{55}}{110\sqrt{55}}\right) = -\frac{2}{9}\pi\frac{110\sqrt{55}-1}{55\sqrt{55}} =$$

$$= -\frac{2}{9}\pi\frac{6050-\sqrt{55}}{3025} = \frac{2\left(\sqrt{55}-6050\right)}{27225}\pi$$

In conclusione solo il quarto addendo è diverso da zero quindi l'integrale cercato vale:

$$\int_{C^+} \boldsymbol{F} dx = \frac{2\left(\sqrt{55} - 6050\right)}{27225}\pi$$