Esercizio 2:
Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\Omega} 2z dx dy dz$$

Sull'insieme:

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in R^3 : 2\sqrt{x^2 + y^2} < z < x + 2\right\}$$

Svolgimento:
Ω è la regione di spazio compresa tra il semicono di equazione $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ e il piano $z = x + 2$ disegnata in figura 1.

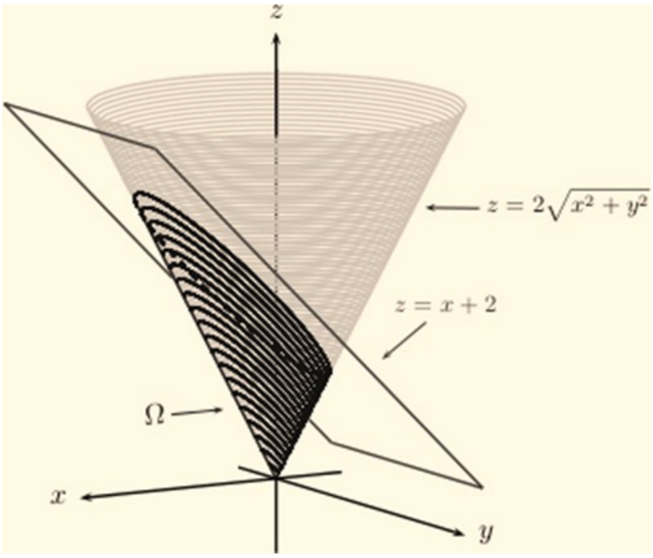

Figura 1 L'insieme Ω

$$\int_{\Omega} 2z dx dy dz = \int_{S} \left(\int_{2\sqrt{x^2+y^2}}^{x+2} 2z dz\right) dx dy$$

dove S è l'ellisse intersezione del semicono $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ e del piano $z = x + 2$.
Troviamo l'equazione dell'ellissi risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} z = 2\sqrt{x^2 + y^2} \\ z = x + 2 \end{cases} \rightarrow \quad 2\sqrt{x^2 + y^2} = x + 2$$

elevando ambo i membri al quadrato:

$$4(x^2 + y^2) = (x + 2)^2 \rightarrow 4x^2 + 4y^2 = x^2 + 4x + 4 \rightarrow 3x^2 - 4x + 4y^2 - 4 = 0$$

Adesso voglio scrivere questa equazione in forma canonica. Divido ambo i membri per 3:

$$x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}y^2 - \frac{4}{3} = 0$$

Sommo e sottraggo $\frac{4}{9}$:

$$x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} + \frac{4}{3}y^2 - \frac{4}{3} - \frac{4}{9} = 0 \quad \rightarrow \quad \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}y^2 = \frac{16}{9}$$

Divido ambo i membri per $\frac{16}{9}$:

$$\frac{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{\frac{16}{9}} + \frac{\frac{4}{3}y^2}{\frac{16}{9}} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{\frac{16}{9}} + \frac{y^2}{\frac{16}{9}\frac{3}{4}} = 1$$

Forma canonica:

$$\frac{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{\frac{16}{9}} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1$$

È un'ellisse con centro $C \equiv \left(\frac{2}{3}, 0\right)$, e semiassi $a = \frac{4}{3}$ e $b = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Calcoliamo l'integrale:

$$\int_S \left(\int_{2\sqrt{x^2+y^2}}^{x+2} 2zdz\right) dxdy = \int_S \left[z^2 \Big|_{2\sqrt{x^2+y^2}}^{x+2}\right] dxdy =$$

$$\int_S \left[(x+2)^2 - \left(2\sqrt{x^2+y^2}\right)^2\right] dxdy = \int_S (x^2 + 4x + 4 - 4x^2 - 4y^2)\, dxdy =$$

$$= \int_S (-3x^2 + 4x + 4 - 4y^2) dxdy$$

Per integrare sulla superficie S uso le coordinate ellittiche:

$$\begin{cases} x = x_0 + a\rho cos\theta \\ y = y_0 + b\rho sin\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\rho cos\theta \\ y = \frac{2\sqrt{3}}{3}\rho sin\theta \end{cases}$$

$$dxdy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{4}{3}cos\theta & -\frac{4}{3}\rho sin\theta \\ \frac{2\sqrt{3}}{3}sin\theta & \frac{2\sqrt{3}}{3}\rho cos\theta \end{vmatrix} = \frac{8\sqrt{3}}{9}\rho cos^2\theta + \frac{8\sqrt{3}}{9}\rho sin^2\theta = \frac{8\sqrt{3}}{9}\rho d\rho d\theta$$

Adesso devo trovare gli estremi di integrazione:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Per trovare gli estremi di integrazione di ρ considero l'equazione dell'ellisse:

$$\frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{16}{9}}+\frac{y^2}{\frac{4}{3}}\leq 1$$

e sostituisco le coordinate ellittiche.

$$\frac{\left(\frac{4}{3}\rho cos\theta\right)^2}{\frac{16}{9}}+\frac{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\rho sin\theta\right)^2}{\frac{4}{3}}\leq 1$$

$$\frac{\frac{16}{9}\rho^2cos^2\theta}{\frac{16}{9}}+\frac{\frac{4}{3}\rho^2sin^2\theta}{\frac{4}{3}}\leq 1 \quad\rightarrow\quad \rho^2cos^2\theta+\rho^2sin^2\theta\leq 1 \quad\rightarrow\quad \rho^2\leq 1 \quad -1\leq\rho\leq 1$$

Considero solo i valori positivi, quindi:

$0\leq\rho\leq 1$

$$=\int_S(-3x^2+4x+4-4y^2)dxdy=\frac{8\sqrt{3}}{9}\int_0^{2\pi}\int_0^1\left[-3\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\rho cos\theta\right)^2+4\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\rho cos\theta\right)+4-4\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\rho sin\theta\right)^2\right]\rho d\rho d\theta=$$

$$=\frac{8\sqrt{3}}{9}\int_0^{2\pi}\int_0^1\left[-3\left(\frac{4}{9}+\frac{16}{9}\rho cos\theta+\frac{16}{9}\rho^2cos^2\theta\right)+\frac{8}{3}+\frac{16}{3}\rho cos\theta+4-\frac{16}{3}\rho^2sin^2\theta\right]\rho d\rho d\theta=$$

$$=\frac{8\sqrt{3}}{9}\int_0^{2\pi}\int_0^1\left[-\frac{4}{3}-\frac{16}{3}\rho cos\theta-\frac{16}{3}\rho^2cos^2\theta+\frac{8}{3}+\frac{16}{3}\rho cos\theta+4-\frac{16}{3}\rho^2sin^2\theta\right]\rho d\rho d\theta=$$

$$=\frac{8\sqrt{3}}{9}\int_0^{2\pi}\int_0^1\left[-\frac{16}{3}\rho^2cos^2\theta+\frac{16}{3}-\frac{16}{3}\rho^2sin^2\theta\right]\rho d\rho d\theta=\frac{8\sqrt{3}}{9}\int_0^{2\pi}\int_0^1\left[-\frac{16}{3}\rho^2(cos^2\theta+sin^2\theta)+\frac{16}{3}\right]\rho d\rho d\theta=$$

$$=\frac{128\sqrt{3}}{27}\int_0^{2\pi}\int_0^1[1-\rho^2]\rho d\rho d\theta=\frac{128\sqrt{3}}{27}\int_0^{2\pi}\int_0^1[\rho-\rho^3]d\rho d\theta=\frac{128\sqrt{3}}{27}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^1\right]d\theta=$$

$$=\frac{128\sqrt{3}}{27}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right]d\theta=\frac{128\sqrt{3}}{27}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}d\theta=\frac{128\sqrt{3}}{27}\frac{1}{2}\theta\bigg|_0^{2\pi}=\frac{64\sqrt{3}}{27}2\pi=\frac{128\sqrt{3}}{27}\pi$$