Esercizio 3:

Si consideri il solido E intersezione dei due solidi S e C.

$$S = \{(x,y,z) \in R^3 : z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

$$C = \{(x,y,z,) \in R^3 : x \geq 0, y \geq 0, y \leq -x + 2\}$$

Si calcoli

$$\iiint_E 2zdxdydz.$$

Svolgimento:

E è l'intersezione della semisfera con centro l'origine e raggio 2 e il piano y=-x+2.
Trovo gli estremi di integrazione:

$$0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

$$0 \leq y \leq -x + 2$$

Poiché deve essere $-x + 2 \geq 0$:

$$0 \leq x \leq 2$$

Calcolo l'integrale:

$$\iiint_E 2zdxdydz = \int_0^2 dx \int_0^{-x+2} dy \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 2zdz =$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{-x+2} \left(\frac{2z^2}{2} \Bigg|_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \right) dy = \int_0^2 dx \int_0^{-x+2} (4 - x^2 - y^2) dy =$$

$$= \int_0^2 \left(4y - x^2 y - \frac{y^3}{3} \Bigg|_0^{-x+2} \right) dx =$$

$$= \int_0^2 \left[4(-x+2) - x^2(-x+2) - \frac{(-x+2)^3}{3} \right] dx =$$

$$= \int_0^2 \left[-4x + 8 + x^3 - 2x^2 - \frac{-x^3 + 6x^2 - 12x + 8}{3} \right] dx =$$

$$= \int_0^2 \frac{-12x + 24 + 3x^3 - 6x^2 + x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{3} dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^2 (4x^3 - 12x^2 + 16) \, dx = \frac{1}{3} \left(\frac{4x^4}{4} - \frac{12x^3}{3} + 16x \Bigg|_0^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{3} (2^4 - 4 * 2^3 + 16 * 2) = \frac{1}{3} (16 - 32 + 32) = \frac{16}{3}$$