Esercizio 4:

Si consideri il solido E intersezione dei due solidi S e C.

$$S = \{(x,y,z) \in R^3 : z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$$

$$C = \{(x,y,z,) \in R^3 : x \geq 0, y \leq 0, y \leq x - 1\}$$

Si calcoli

$$\iiint_E 3z dx dy dz.$$

Svolgimento:

E è l'intersezione della semisfera con centro l'origine e raggio 3 e il piano y=x-1.
Trovo gli estremi di integrazione:

$$0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

$$x - 1 \leq y \leq 0$$

Poiché deve essere $x - 1 \leq 0$:

$$0 \leq x \leq 1$$

Calcolo l'integrale:

$$\iiint_E 3z dx dy dz = \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 dy \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} 3z dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 \left(\frac{3z^2}{2} \bigg|_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \right) dy = \frac{3}{2} \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 (9 - x^2 - y^2) dy =$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^1 \left(9y - x^2 y - \frac{y^3}{3} \bigg|_{x-1}^{0} \right) dx =$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^1 \left[0 - 9(x-1) + x^2(x-1) + \frac{(x-1)^3}{3} \right] dx =$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^1 \left[-9x + 9 + x^3 - x^2 + \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{3} \right] dx =$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{-27x + 27 + 3x^3 - 3x^2 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{3} dx =$$

$$= \frac{3}{2} \frac{1}{3} \int_0^1 (4x^3 - 6x^2 - 24x + 26)\, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{4x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} - \frac{24x^2}{2} + 26x \bigg|_0^1 \right) =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - 2 - 12 + 26) = \frac{13}{2}$$