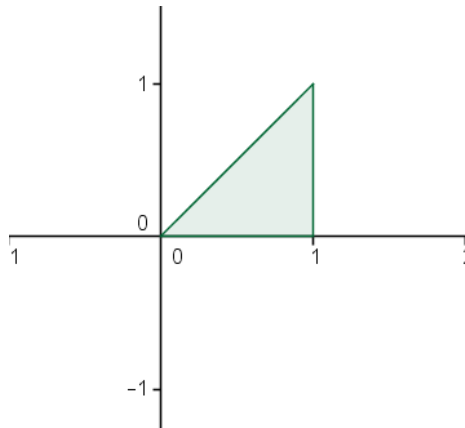


Esercizio 6:

Calcolare l'integrale della funzione $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2}$ nel triangolo formato dalle rette $x=1$, $y=x$ e $y=0$. Disegnare l'insieme in cui si calcola l'integrale.

Svolgimento:

Disegno l'insieme in cui si calcola l'integrale:



Nell'insieme si ha:

$$0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq x$$

La funzione integranda è definita per $1 - x^2 \geq 0 \rightarrow -1 \leq x \leq 1$ ed è integrabile in questo intervallo.

Calcolo l'integrale:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^x \sqrt{1 - x^2} dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^x \sqrt{1 - x^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\sqrt{1 - x^2} y \Big|_0^x \right) dx = \\ &= \int_0^1 (x\sqrt{1 - x^2}) dx = \end{aligned}$$

Integro per sostituzione:

$$t = 1 - x^2 \rightarrow dt = -2x dx \rightarrow x dx = -\frac{1}{2} dt$$

Estremi di integrazione:

$$\text{se } x = 0 \rightarrow t = 1 \quad \text{se } x = 1 \rightarrow t = 0$$

$$= \int_1^0 \left(-\frac{1}{2} \sqrt{t} \right) dt = -\frac{1}{2} \int_1^0 t^{\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{2} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^0 = -\frac{12}{23} (-1) = \frac{1}{3}$$