

Esercizio 10:

Calcolare il seguente integrale.

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx$$

Svolgimento:

È l'integrale di una frazione. Il denominatore ha grado maggiore del denominatore. Scomponiamo il denominatore in fattori primi:

$$\int \frac{1}{(x+1)(x-1)} dx$$

Applichiamo il metodo di integrazione dei fratti semplici:

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{Ax - A + Bx + B}{(x+1)(x-1)} = \frac{(A+B)x - A + B}{(x+1)(x-1)}$$

Ora due frazioni sono uguali se hanno lo stesso numeratore e lo stesso denominatore. Dobbiamo, quindi trovare A e B risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A + B = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{2} \\ A = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ma allora:

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} = -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)}$$

Adesso siamo capaci di calcolare l'integrale:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - 1} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} = \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C = \\ &= \ln \sqrt{x-1} - \ln \sqrt{x+1} + C = \ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C \end{aligned}$$

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales