Esercizio 11:

Calcolare il seguente integrale.

$$\int \frac{3x}{x^3-1}\,dx$$

Svolgimento:

È l'integrale di una frazione. Il denominatore ha grado maggiore del numeratore. Scomponiamo il denominatore in fattori primi:

$$\int \frac{3x}{(x-1)(x^2+x+1)}\,dx$$

Applichiamo il metodo di integrazione dei fratti semplici:

$$\frac{3x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{Ax^2+Ax+A+Bx^2-Bx+Cx-C}{(x-1)(x^2+x+1)} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2+(A-B+C)x+A-C}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

Ora due frazioni sono uguali se hanno lo stesso numeratore e lo stesso denominatore. Dobbiamo, quindi trovare A e B risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B+C=3 \\ A-C=0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} A=C \\ C+B=0 \\ 2C-B=3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} A=C \\ B=-C \\ 3C=3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} C=1 \\ A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

Ma allora:

$$\frac{3x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{-x+1}{x^2+x+1}$$

Riscriviamo l'integrale assegnato:

$$\int \frac{3x}{x^3-1}\,dx = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{1-x}{x^2+x+1}\,dx =$$

Il calcolo del primo addendo è immediato:

$$\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + C$$

Per trovare il secondo addendo dobbiamo lavorare un po'. Moltiplichiamo numeratore e denominatore per -2:

$$\int \frac{1-x}{x^2+x+1}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2+x+1}\,dx =$$

Adesso sommiamo e sottraiamo 3 al numeratore:

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{2x-2+3-3}{x^2+x+1} = -\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx =$$

Possiamo calcolare il primo addendo per sostituzione:

$$-\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx =$$

Poniamo

$$t = x^2 + x + 1 \qquad \rightarrow \qquad dt = (2x+1)dx$$

Sostituendo si ottiene:

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln|t|$$

Quindi:

$$-\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = -\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + C$$

Adesso ci manca l'ultimo pezzo:

$$\frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx =$$

Usiamo il metodo del "completamento dei quadrati". Osserviamo che al denominatore il termine di primo grado può essere considerato il doppio prodotto di *x* e di ½. Per far tornare i conti dobbiamo anche aggiungere ¾[1]. Ma allora possiamo scrivere:

$$= \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}dx =$$

Adesso raccogliamo 3/4 al denominatore:

$$= \frac{3}{2}\int \frac{1}{\frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2 + 1\right]}dx = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{4x+2}{2\sqrt{3}}\right)^2 + 1}dx = 2\int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}dx =$$

Integriamo per sostituzione:

$$t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \qquad \rightarrow \qquad dt = \frac{2}{\sqrt{3}}dx \qquad \rightarrow \qquad dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt$$

Sostituiamo:

$$= 2\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{t^2+1}dt = \sqrt{3}arctgt + c$$

Quindi:

$$\frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx = \sqrt{3}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

Siamo finalmente arrivati alla soluzione. Ricomponiamo i pezzi:

$$\int \frac{3x}{(x-1)(x^2+x+1)}dx = \ln|x-1| - \frac{1}{1}\ln(x^2+x+1) + \sqrt{3}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

Matilde Consales

[1] Infatti $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}$