

Esercizio 21:

Calcolare il seguente integrale.

$$\int \frac{x+4}{x^2+6x+10} dx$$

Svolgimento:

È l'integrale di una frazione. Il denominatore ha grado maggiore del numeratore. Se moltiplichiamo e dividiamo per 2 possiamo scrivere:

$$\int \frac{x+4}{x^2+6x+10} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2(x+4)}{x^2+6x+10} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+8}{x^2+6x+10} dx =$$

Adesso togliamo ed aggiungiamo 2 al numeratore:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+8-2+2}{x^2+6x+10} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+6}{x^2+6x+10} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2}{x^2+6x+10} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+6}{x^2+6x+10} dx + \int \frac{dx}{x^2+6x+10} \end{aligned}$$

Risolviamo il primo integrale per sostituzione:

$$t = x^2 + 6x + 10 \quad \rightarrow \quad dt = (2x + 6)dx$$

Quindi:

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x+6}{x^2+6x+10} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln(x^2+6x+10) + C = \ln \sqrt{x^2+6x+10} + C$$

Consideriamo adesso il secondo integrale. Per prima cosa vediamo se il denominatore è scomponibile in fattori primi. Troviamo il discriminante del trinomio di secondo grado:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 10 = 36 - 40 = -4 < 0$$

Il trinomio presenta discriminante negativo quindi non è scomponibile. Dobbiamo usare il metodo del completamento dei quadrati. Si ha:

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+10} = \int \frac{dx}{x^2+6x+9+1} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+1} = \arctg(x+3) + C$$

Ricomponiamo i pezzi:

$$\int \frac{x+4}{x^2+6x+10} dx = \ln \sqrt{x^2+6x+10} + \arctg(x+3) + C$$

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales