

Esercizio 22:

Calcolare il seguente integrale.

$$\int \frac{9x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 7x - 1}{9x^2 + 6x + 1} dx$$

Svolgimento:

È l'integrale di una frazione. Il denominatore ha grado minore del numeratore. Procediamo per gradi: notiamo che il trinomio al denominatore può essere scomposto in fattori primi infatti:

$$9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2$$

Vediamo adesso se il numeratore è divisibile per $3x+1$ (per farlo sostituiamo $x = -\frac{1}{3}$):

$$9\frac{1}{3^4} - 6\frac{1}{3^3} + 10\frac{1}{3^2} - 7\frac{1}{3} - 1 = \frac{9}{81} - \frac{6}{27} + \frac{10}{9} - \frac{7}{3} - 1 = \frac{1 - 2 + 10 - 21 - 9}{9} = -\frac{21}{9} = -\frac{7}{3}$$

La risposta è negativa. Non ci resta che fare la divisione tra polinomi:

$$\begin{array}{r|l} 9x^4+6x^3+10x^2+7x-1 & 9x^2+6x+1 \\ & \hline & x^2+1 \\ \hline -9x^4-6x^3-x^2 & \\ \hline & 9x^2+7x-1 \\ & -9x^2-6x-1 \\ \hline & x-2 \end{array}$$

Il quoziente è x^2+1 ed il resto vale $x-2$. Possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \int \frac{9x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 7x - 1}{9x^2 + 6x + 1} dx &= \int (x^2 + 1) dx + \int \frac{x - 2}{9x^2 + 6x + 1} dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + x + \int \frac{x - 2}{9x^2 + 6x + 1} dx = \frac{x^3}{3} + x + \int \frac{x - 2}{(3x + 1)^2} dx \end{aligned}$$

Per calcolare l'integrale usiamo il metodo dei fratti semplici:

$$\frac{x - 2}{(3x + 1)^2} = \frac{A}{3x + 1} + \frac{B}{(3x + 1)^2} = \frac{3Ax + A + B}{(3x + 1)^2}$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} 3A = 1 \\ A + B = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = -2 - \frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{7}{3} \end{cases}$$

Quindi:

$$\int \frac{x-2}{(3x+1)^2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{3x+1} - \frac{7}{3} \int \frac{dx}{(3x+1)^2} =$$

Risolviamo per sostituzione:

$$t = 3x + 1 \quad \rightarrow \quad dt = 3dx \quad \rightarrow \quad dx = \frac{1}{3} dt$$

$$= \frac{1}{9} \int \frac{dt}{t} - \frac{7}{9} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{9} \ln|t| + \frac{7}{9t} + C$$

Ricomponiamo i pezzi:

$$\int \frac{9x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 7x - 1}{9x^2 + 6x + 1} dx = \frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{9} \ln|3x + 1| + \frac{7}{9(3x + 1)} + C$$

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales