Esercizio 25:

Calcolare il seguente integrale.

$$\int \frac{x^2+8x+18}{x^2+6x+9}\,dx$$

Svolgimento:

È l'integrale di una frazione. Il denominatore ha grado uguale al numeratore. Il denominatore è scomponibile in fattori primi:

$$x^2+6x+9=(x+3)^2$$

Il numeratore, invece, no. Infatti ha il discriminante negativo:

$$\Delta = 8^2-4\cdot 18=64-72=-9<0$$

Non possiamo semplificare. Facciamo la divisione tra polinomi:

$$\begin{array}{r|l} x^2+8x+18 & x^2+6x+9 \\ \cline{2-2} & 1 \\ -x^2-6x-9 & \\ \hline 2x+9 & \end{array}$$

Il quoziente è *1* ed il resto vale *2x+9*. Possiamo scrivere:

$$\int dx+\int \frac{2x+9}{x^2+6x+9}\,dx=$$

Consideriamo il secondo integrale e scriviamolo nel seguente modo:

$$=\int dx+\int \frac{2x+6}{x^2+6x+9}\,dx+\int \frac{3}{x^2+6x+9}\,dx=$$

$$=\int dx+\int \frac{2x+6}{x^2+6x+9}\,dx+\int \frac{3}{(x+3)^2}\,dx=$$

Il primo integrale è immediato. Per risolvere gli altri due possiamo usare la sostituzione. Consideriamo il secondo integrale:

$$\int \frac{2x+6}{x^2+6x+9}\,dx=$$

Poniamo $t=x^2+6x+9 \quad \rightarrow \quad dt=(2x+6)dx$

$$=\int \frac{dt}{t}=\ln t=\ln(x^2+6x+9)=\ln(x+3)^2$$

Consideriamo ora il terzo integrale:

$$\int \frac{3}{(x+3)^2}\,dx=$$

Poniamo $t=x+3 \quad \rightarrow \quad dt=dx$

$$= \int \frac{3}{t^2} dt = 3 \int t^{-2} dt = -3t^{-1} = -\frac{3}{t} = -\frac{3}{x+3}$$

Quindi:

$$\int \frac{x^2 + 8x + 18}{x^2 + 6x + 9} dx = x + \ln(x+3)^2 - \frac{3}{x+3} + C$$

Matilde Consales