Esercizio 14:

Calcolare il seguente integrale.

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx$$

Svolgimento:

La funzione integranda non è definita per *x=0* quindi dobbiamo trovare:

$$\lim_{z \to 0^+} \int_z^1 \frac{\ln x}{x} dx$$

Intanto troviamo

$$\int_z^1 \frac{\ln x}{x} dx =$$

per parti:

$$f(x) = \ln x \qquad g(x) = \ln x$$
$$f'(x) = \frac{1}{x} dx \qquad g'(x) = \frac{1}{x} dx$$

$$ln^2 x - \int_z^1 \frac{\ln x}{x} dx$$

Possiamo scrivere:

$$\int_z^1 \frac{\ln x}{x} dx = ln^2 x - \int_z^1 \frac{\ln x}{x} dx \qquad \to \qquad 2 \int_z^1 \frac{\ln x}{x} dx = ln^2 x$$

Quindi:

$$\int_z^1 \frac{\ln x}{x} dx = \frac{ln^2 x}{2} \bigg|_z^1 = \frac{ln^2 1}{2} - \frac{ln^2 z}{2} = -\frac{ln^2 z}{2}$$

Facciamo il limite:

$$\lim_{z \to 0^+} \left(-\frac{ln^2 z}{2} \right) = -\infty$$

L'integrale dato diverge.

Matilde Consales