Esercizio 33:

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 2\ln x\, dx$$

Svolgimento:

La funzione integranda non è definita per *x=0* quindi dobbiamo trovare:

$$\lim_{z\to 0^+}\int_z^1 2\ln x\, dx =$$

Procediamo per parti:

$$g(x) = x \qquad \to \qquad g'(x) = dx$$
$$f(x) = \ln x \qquad \to \quad f'(x) = \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{z\to 0^+} 2\left(x\ln x - \int_z^1 x\frac{1}{x}dx\right) = 2\lim_{z\to 0^+}\left(x\ln x - \int_z^1 dx\right) =$$

$$= 2\lim_{z\to 0^+}\left(xlnx - x\,\Bigg|_z^1\right) = 2\lim_{z\to 0^+}(0 - 1 - zlnz + z) = \qquad (1)$$

Calcoliamo:

$$\lim_{z\to 0^+} zlnz =$$

È una forma indeterminata $0\cdot(-\infty)$ ma possiamo scrivere:

$$= \lim_{z\to 0^+}\frac{\ln z}{\frac{1}{z}} =$$

Adesso siamo di fronte alla forma indeterminata $\frac{-\infty}{+\infty}$ possiamo applicare la regola di De l'Hospital:

$$= \lim_{z\to 0^+}\frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z^2}} = \lim_{z\to 0^+}\left(-\frac{1}{z}z^2\right) = \lim_{z\to 0^+}(-z) = 0$$

Sostituendo nella (1) troviamo:

$$= 2(-1) = -2$$

Matilde Consales