Esercizio 39:

Dato l'integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+e^x)^2}\,dx$$

Dimostrare che converge e calcolarne il valore

Svolgimento:

L'integrale dato è un integrale improprio di prima specie. Dato che:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(1+e^x)^2} = 0$$

La condizione necessaria (ma non sufficiente) è soddisfatta quindi l'integrale potrebbe convergere. Ora osserviamo che:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+e^x)^2}\,dx < \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Infatti è l'integrale di Gauss. Ma allora l'integrale dato converge perché minore di un integrale improprio convergente.

Calcoliamo l'integrale:

$$\int_0^{z} \frac{1}{(1+e^x)^2}\,dx =$$

$$= \int_0^{z} \frac{1+e^x-e^x}{(1+e^x)^2}\,dx = \int_0^{z} \frac{1+e^x}{(1+e^x)^2}\,dx - \int_0^{z} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx =$$

Calcoliamo il secondo integrale per sostituzione:

$$t = e^x \quad dt = e^x dx \quad se\ x = 0 \quad t = 1 \quad se\ \ x = z \quad t = e^z$$

$$= \int_0^{z} \frac{1}{1+e^x}\,dx - \int_1^{e^z} \frac{1}{(1+t)^2}\,dt = \int_0^{z} \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\,dx + \frac{1}{(1+t)}\Bigg|_1^{e^z} =$$

$$= \int_0^{z} dx - \int_0^{z} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx + \frac{1}{1+e^z} - \frac{1}{2} =$$

Calcoliamo il secondo integrale per sostituzione come prima:

$$= x\Bigg|_0^{z} - \int_1^{e^z} \frac{1}{1+t}\,dt + \frac{1}{1+e^z} - \frac{1}{2} = z - \ln(1+t)\Bigg|_1^{e^z} + \frac{1}{1+e^z} - \frac{1}{2} =$$

$$= z - \ln(1+e^z) + \ln 2 + \frac{1}{1+e^z} - \frac{1}{2} \qquad (1)$$

Non ci resta che calcolare il limite per $z \to +\infty$ ma prima osserviamo che per valori molto grandi di z si ha:

$$\ln(1+e^z) \sim \ln e^z = z$$

Possiamo scrivere la (1) nel seguente modo:

$$z - z + \ln 2 + \frac{1}{1 + e^z} - \frac{1}{2}$$

$$\lim_{z \to +\infty} \left(z - z + \ln 2 + \frac{1}{1 + e^z} - \frac{1}{2} \right) = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + e^x)^2} \, dx = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

Matilde Consales