Esercizio 40

Dato l'integrale improprio:

$$\int_0^1 \frac{|\sin x|}{\log(1+\sqrt{x})\,(e^{x^\alpha}-1)}\,dx$$

Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito.

Svolgimento:

La funzione integranda è sempre positiva nell'intervallo di integrazione infatti:

$$\sin x \geq 0 \; per \; 0 \leq x \leq 1$$

$$\log(1+\sqrt{x}) \geq 0 \; per \; 0 \leq x \leq 1$$

$$e^{x^\alpha} - 1 \geq 0 \; per \; 0 \leq x \leq 1$$

Per $x \in (0,1]$ la funzione integranda è continua. L'unico estremo che dà problemi è *x=0*. Intanto osserviamo che poiché $|\sin x| < 1$[1] si ha:

$$\int_0^1 \frac{|\sin x|}{\log(1+\sqrt{x})\,(e^{x^\alpha}-1)}\,dx < \int_0^1 \frac{1}{\log(1+\sqrt{x})\,(e^{x^\alpha}-1)}\,dx$$

Quindi l'integrale proposto ha lo stesso carattere dell'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{\log(1+\sqrt{x})\,(e^{x^\alpha}-1)}\,dx$$

Studiamo adesso il comportamento della funzione integranda in un intorno di 0^+. In questo intorno:

$$\log(1+\sqrt{x}) \sim \sqrt{x}$$ [2]

Per l'altro fattore le cose sono un po' più complicate: dobbiamo vedere a quale funzione è asintoticamente equivalente $e^{x^\alpha} - 1$. Ricordiamo che due funzioni *f(x)* e *g(x)* sono asintoticamente equivalenti in un intorno di x_0 con $g(x) \neq 0 \; \forall \; x \neq x_0$ se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Precisato questo calcoliamo:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x^\alpha} - 1}{x^\alpha} =$$

Ci troviamo di fronte ad una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ applichiamo la regola di De l'Hospital:

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\alpha x^{\alpha-1} e^{x^\alpha}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \to 0^+} e^{x^\alpha} = 1$$

Possiamo, allora, affermare che:

$$e^{x^\alpha} - 1 \sim x^\alpha$$

In un intorno di $x = 0^+$

---

[1] In questo intervallo il valore assoluto è superfluo.

[2] Infatti se facciamo lo sviluppo in serie di Taylor in un intorno di x=0 troviamo $log(x+1) = x + o(x)$

Ma allora:

$$\frac{1}{\log\left(1+\sqrt{x}\right)\left(e^{x^{\alpha}}-1\right)} \sim \frac{1}{\sqrt{x}x^{\alpha}} = \frac{1}{x^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

Non ci resta che vedere per quali valori di α converge il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha+\frac{1}{2}}}\,dx$$

Calcoliamo:

$$\int_z^1 \frac{1}{x^{\alpha+\frac{1}{2}}}\,dx$$

Se $\alpha = \frac{1}{2}$ si ha:

$$\int_z^1 \frac{1}{x}\,dx = \ln x \Big|_z^1 = \ln 1 - \ln z = -\ln z$$

In questo caso:

$$\lim_{z\to 0^+}(-\ln z) = +\infty$$

L'integrale diverge[3]. Se $\alpha \neq \frac{1}{2}$:

$$\int_z^1 \frac{1}{x^{\alpha+\frac{1}{2}}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}-\alpha}}{\frac{1}{2}-\alpha}\Bigg|_z^1 = \frac{1}{\frac{1-2\alpha}{2}} - \frac{z^{\frac{1}{2}-\alpha}}{\frac{1-2\alpha}{2}} = \frac{2}{1-2\alpha}\left(1 - z^{\frac{1}{2}-\alpha}\right)$$

Per finire vediamo per quali valori di α esiste finito:

$$\lim_{z\to 0^+}\frac{2}{1-2\alpha}\left(1 - z^{\frac{1}{2}-\alpha}\right)$$

Si vede che deve essere:

$$\frac{1}{2} - \alpha > 0 \quad \rightarrow \quad \alpha < \frac{1}{2}$$

Si conclude che l'integrale dato esiste finito se:

$$\alpha < \frac{1}{2}$$

Matilde Consales

[3] Ma non possiamo affermare nulla sull'integrale proposto. Infatti sappiamo solo che è minore di un integrale divergente e, quindi, potrebbe anche convergere.