Esercizio 41:

Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x^2 + 3}{x^\alpha(1 + 7log^2x + 12log^4x)} dx$$

E calcolare l'integrale *α=1*.

Svolgimento:

Nell'intervallo di integrazione per una nota proprietà dei logaritmi possiamo scrivere:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x^2 + 3}{x^\alpha(1 + 7log^2x + 12log^4x)} dx = \int_1^{+\infty} \frac{2\log x + 3}{x^\alpha(1 + 7log^2x + 12log^4x)} dx$$

È un integrale improprio di prima specie. La funzione integranda non presenta problemi nell'intervallo di integrazione. Verifichiamo la condizione necessaria (ma non sufficiente) per la convergenza. Si vede subito che:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\log x + 3}{x^\alpha(1 + 7log^2x + 12log^4x)} = 0$$

Infatti il logaritmo presenta l'ordine di infinito più basso. Dato che la condizione necessaria è soddisfatta l'integrale in esame potrebbe convergere.
La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione. Possiamo applicare il confronto asintotico.
Consideriamo il numeratore:

$$2\log x + 3 \sim 2\log x \quad per\ x \to +\infty$$

E il denominatore:

$$x^\alpha(1 + 7log^2x + 12log^4x) \sim 12x^\alpha \cdot log^4x \quad per\ x \to +\infty$$

Quindi:

$$\frac{2\log x + 3}{x^\alpha(1 + 7log^2x + 12log^4x)} \sim \frac{2\log x}{12x^\alpha \cdot log^4x} = \frac{1}{6x^\alpha \cdot log^3x} \quad per\ x \to +\infty$$

Per il criterio del confronto asintotico l'integrale proposto converge se converge l'integrale[1]:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{6x^\alpha \cdot log^3x} dx$$

Che converge per $\alpha \geq 1$.

Concludiamo che l'integrale proposto converge per $\alpha \geq 1$.

Calcoliamo:

$$\int_1^{+\infty} \frac{2\log x + 3}{x(1 + 7log^2x + 12log^4x)} dx$$

Facciamo la sostituzione:

$$\log x = t \quad x = e^{\log x} = e^t \qquad dx = e^t dt$$

$$se \quad x = 1 \quad \to \quad t = 0 \quad se \ \ x = +\infty \quad \to \quad t = +\infty$$

[1] In realtà la funzione integranda non è definita per x=1 ma, dato che l'integrale proposto non ha problemi in questo punto, consideriamo l'intorno destro di 1.

Dobbiamo calcolare:

$$\int_0^{+\infty} \frac{(2t+3)e^t}{e^t(1+7t^2+12t^4)}dt = \int_0^{+\infty} \frac{2t+3}{1+7t^2+12t^4}dt$$

Troviamo:

$$\int_0^{z} \frac{2t+3}{1+7t^2+12t^4}dt$$

È una funzione razionale. Usiamo il metodo dei fratti semplici. Per scomporre il denominatore poniamo:

$$y = t^2$$

E risolviamo l'equazione:

$$12y^2 + 7y + 1 = 0$$

$$y_{1-2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{24} = \frac{-7 \pm 1}{24}$$

$$y_1 = -\frac{6}{24} = -\frac{1}{4} \qquad y_2 = -\frac{8}{24} = -\frac{1}{3}$$

Quindi:

$$1 + 7t^2 + 12t^4 = \left(t^2 + \frac{1}{4}\right)\left(t^2 + \frac{1}{3}\right)$$

Possiamo scrivere:

$$\frac{2t+3}{1+7t^2+12t^4} = \frac{At+B}{t^2+\frac{1}{4}} + \frac{Ct+D}{t^2+\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{(At+B)\left(t^2+\frac{1}{3}\right) + (Ct+D)\left(t^2+\frac{1}{4}\right)}{\left(t^2+\frac{1}{4}\right)\left(t^2+\frac{1}{3}\right)} = \frac{At^3 + \frac{1}{3}At + Bt^2 + \frac{1}{3}B + Ct^3 + \frac{1}{4}Ct + Dt^2 + \frac{1}{4}D}{\left(t^2+\frac{1}{4}\right)\left(t^2+\frac{1}{3}\right)}$$

$$= \frac{(A+C)t^3 + (B+D)t^2 + \left(\frac{1}{3}A + \frac{1}{4}C\right)t + \frac{1}{3}B + \frac{1}{4}D}{\left(t^2+\frac{1}{4}\right)\left(t^2+\frac{1}{3}\right)}$$

Uguagliando i numeratori si trova:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + D = 0 \\ \frac{1}{3}A + \frac{1}{4}C = 2 \\ \frac{1}{3}B + \frac{1}{4}D = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -C \\ B = -D \\ -\frac{1}{3}C + \frac{1}{4}C = 2 \\ -\frac{1}{3}D + \frac{1}{4}D = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{-4+3}{12}C = 2 \\ \frac{-4+3}{12}D = 3 \\ A = -C \\ B = -D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{-1}{12}C = 2 \\ \frac{-1}{12}D = 3 \\ A = -C \\ B = -D \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = -24 \\ D = -36 \\ A = 24 \\ B = 36 \end{cases}$$

Sostituendo:

$$\int_0^z \frac{2t+3}{1+7t^2+12t^4}\,dt = \int_0^z \left(\frac{24t+36}{t^2+\frac{1}{4}} - \frac{24t+36}{t^2+\frac{1}{3}} \right) dt =$$

$$= \int_0^z \left(\frac{24t}{t^2+\frac{1}{4}} + \frac{36}{t^2+\frac{1}{4}} - \frac{24t}{t^2+\frac{1}{3}} - \frac{36}{t^2+\frac{1}{3}} \right) =$$

$$= 12\int_0^z \frac{2t}{t^2+\frac{1}{4}} + 18\int_0^z \frac{2dt}{\frac{1}{4}(4t^2+1)} - 12\int_0^z \frac{2t}{t^2+\frac{1}{3}} + \frac{36}{\sqrt{3}}\int_0^z \frac{\sqrt{3}dt}{\frac{1}{3}(3t^2+1)} =$$

$$= 12\log\left(t^2+\frac{1}{4}\right) + 72\cdot arctg(2t) - 12\log\left(t^2+\frac{1}{3}\right) - \frac{108}{\sqrt{3}}\cdot arctg\left(\sqrt{3}t\right)\Big|_0^z =$$

$$= 12\log\frac{t^2+\frac{1}{4}}{t^2+\frac{1}{3}} + 72\cdot arctg(2t) - \frac{108}{\sqrt{3}}\cdot arctg\left(\sqrt{3}t\right)\Big|_0^z =$$

$$= 12\log\frac{z^2+\frac{1}{4}}{z^2+\frac{1}{3}} + 72\cdot arctg(2z) - \frac{108}{\sqrt{3}}\cdot arctg\left(\sqrt{3}z\right) - 12\log\frac{3}{4}$$

Non ci resta che trovare:

$$\lim_{z\to+\infty} 12\log\frac{z^2+\frac{1}{4}}{z^2+\frac{1}{3}} + 72\cdot arctg(2z) - \frac{108}{\sqrt{3}}\cdot arctg\left(\sqrt{3}z\right) - 12\log\frac{3}{4} =$$

$$= \left(72 - \frac{108}{\sqrt{3}}\right)\frac{\pi}{2} - 12\log\frac{3}{4} = \frac{216-108\sqrt{3}}{6}\pi - 12\log\frac{3}{4} \cong 18.59$$

Matilde Consales