Esercizio 42:

Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\left|\cos\left((2-a)x\right)+3\right|}{3^{\alpha x}+1}dx$$

E calcolare l'integrale *α=2*.

Svolgimento:

È un integrale improprio di prima specie. La funzione integranda non presenta problemi nell'intervallo di integrazione. Verifichiamo la condizione necessaria (ma non sufficiente) per la convergenza. Si vede subito che:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left|\cos\left((2-a)x\right)+3\right|}{3^{\alpha x}+1} = 0$$

Infatti a numeratore abbiamo una funzione limitata. Dato che la condizione necessaria è soddisfatta l'integrale in esame potrebbe convergere.
Consideriamo il numeratore:

$$\left|\cos\left((2-a)x\right)+3\right| < 4$$

quindi:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\left|\cos\left((2-a)x\right)+3\right|}{3^{\alpha x}+1}dx < \int_1^{+\infty} \frac{4}{3^{\alpha x}+1}dx =$$

Inoltre:

$$3^{\alpha x}+1 \sim 3^{\alpha x} \quad per\ x \to +\infty$$

Per il criterio del confronto l'integrale proposto converge se converge l'integrale:

$$= \int_1^{+\infty} \frac{4}{3^{\alpha x}}dx = 4\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{\alpha x \ln 3}}dx$$

Che converge per $\alpha > 0$.

Concludiamo che l'integrale proposto converge per $\alpha > 0$.

Calcoliamo l'integrale per *α=2*:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\left|\cos\left((2-2)x\right)+3\right|}{3^{2x}+1}dx = \int_1^{+\infty} \frac{4}{3^{2x}+1}dx$$

Calcoliamo prima:

$$\int_1^{z} \frac{4}{3^{2x}+1}dx = 4\int_1^{z} \frac{1}{3^{2x}+1}dx = 4\int_1^{z} \frac{1+3^{2x}-3^{2x}}{3^{2x}+1}dx =$$

$$= 4\left[\int_1^{z} dx - \int_1^{z} \frac{3^{2x}}{3^{2x}+1}dx\right] = 4\left[z-1-\int_1^{z} \frac{3^{2x}}{3^{2x}+1}dx\right] =$$

Calcoliamo il secondo integrale per sostituzione:

$$t = 3^{2x}+1 \quad \to \quad dt = 2\cdot\ln 3\cdot 3^{2x}dx \quad \to \quad 3^{2x}dx = \frac{dt}{2\cdot\ln 3}$$

$$se\ x = 1\ \ t = 10; \quad se\ \ x = z\ \ t = 3^{2z}+1$$

$$= 4\left[z - 1 - \frac{1}{2}\int_{10}^{3^{2z}+1} \frac{1}{\ln 3 \cdot t} dt\right] = 4\left[z - 1 - \frac{1}{2}(\log_3 t)\Bigg|_{10}^{3^{2z}+1}\right] =$$

$$= 4\left\{z - 1 - \frac{1}{2}[\log_3(3^{2z} + 1) - \log_3 10]\right\}$$

Adesso calcoliamo il limite:

$$\lim_{z \to +\infty} 4\left\{z - 1 - \frac{1}{2}[\log_3(3^{2z} + 1) - \log_3 10]\right\} =$$

Dato che $3^{2z} + 1 \to 3^{2z} \;\; per \;\; z \to +\infty$ possiamo scrivere:

$$= 4 \cdot \lim_{z \to +\infty} \left\{z - 1 - \frac{1}{2}[\log_3(3^{2z}) - \log_3 10]\right\} =$$

$$= 4 \cdot \lim_{z \to +\infty} \left(z - 1 - \frac{1}{2} \cdot 2z + \frac{1}{2}\log_3 10\right) = 4 \cdot \lim_{z \to +\infty} \left(z - 1 - z + \frac{1}{2}\log_3 10\right)$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\log_3 10 - 1\right)$$

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales