Esercizio 43:

Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito:

$$\int_0^{+\infty} \frac{xarctgx}{x^\alpha(x+1)^{2\alpha}}dx$$

E calcolare l'integrale *α=1*.

Svolgimento:

La funzione integranda non è definita per *x=0* quindi dobbiamo spezzare l'integrale in due parti:

$$\int_0^{+\infty} \frac{xarctgx}{x^\alpha(x+1)^{2\alpha}}dx = \int_0^{1} \frac{xarctgx}{x^\alpha(x+1)^{2\alpha}}dx + \int_1^{+\infty} \frac{xarctgx}{x^\alpha(x+1)^{2\alpha}}dx$$

Cominciamo con il primo addendo. È un integrale improprio di seconda specie. La funzione integranda non è definita per *x=0*. Osserviamo che:

$$arctgx \sim x + o(x) \;\; in\, un\, intorno\, di\, x = 0$$

Quindi:

$$\frac{xarctgx}{x^\alpha(x+1)^{2\alpha}} \sim \frac{x^2}{x^\alpha(x+1)^{2\alpha}} \quad per\; x \to 0$$

Inoltre:

$$x + 1 \sim 1 \;\; per \;\; in\, un\, intorno\, di\, x = 0$$

Ma allora:

$$\frac{xarctgx}{x^\alpha(x+1)^{2\alpha}} \sim \frac{x^2}{x^\alpha} = \frac{x^2}{x^\alpha} = x^{2-\alpha} \quad per\; x \to 0$$

Vediamo per quali valori di α esiste finito il:

$$\lim_{z\to 0}\int_z^1 x^{2-\alpha}dx = \frac{x^{3-\alpha}}{3-\alpha}\Bigg|_z^1 = \lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{3-\alpha} - \frac{z^{3-\alpha}}{3-\alpha}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{1}{3-\alpha}(1 - z^{3-\alpha})$$

Troviamo che deve essere:

$$3 - \alpha > 0 \quad \to \quad \alpha < 3$$

Consideriamo adesso:

$$\int_1^{+\infty} \frac{xarctgx}{x^\alpha(x+1)^{2\alpha}}dx$$

È un integrale improprio di seconda specie. Osserviamo che:

$$per\; x > 1 \;\; 0 < arctgx < \frac{\pi}{2}$$

Quindi nell'intervallo di integrazione:

$$\frac{xarctgx}{x^\alpha(x+1)^{2\alpha}} < \frac{\pi}{2x^{\alpha-1}(x+1)^{2\alpha}}$$

Inoltre:

$$x + 1 \sim x \;\; per \;\; x \to +\infty$$

Ma allora:

$$\frac{xarctgx}{x^{\alpha}(x+1)^{2\alpha}} \sim \frac{\pi}{2x^{\alpha-1}x^{2\alpha}} = \frac{\pi}{2x^{3\alpha-1}} \quad per\ \ x \to +\infty$$

Vediamo per quali valori di α esiste finito il:

$$\lim_{z\to+\infty} \frac{\pi}{2}\int_1^z x^{1-3\alpha}dx = \frac{\pi}{2}\lim_{z\to+\infty} \frac{x^{2-3\alpha}}{2-3\alpha}\Bigg|_1^z = \frac{\pi}{2}\lim_{z\to+\infty}\left(\frac{z^{2-3\alpha}}{2-3\alpha} - \frac{1}{2-3\alpha}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\lim_{z\to+\infty}\frac{1}{2-3\alpha}(z^{2-3\alpha}-1)$$

Deve essere:

$$2-3\alpha<0 \quad \to \quad \alpha>\frac{2}{3}$$

L'integrale in esame converge se e solo se convergono tutti e due gli integrali che abbiamo studiato. Quindi se:

$$\frac{2}{3}<\alpha<3$$

Calcoliamo l'integrale per *α=1* in questo caso la funzione integranda è definita per *x=0* non è necessario spezzare in due l'intervallo di integrazione:

$$\int_0^{+\infty}\frac{xarctgx}{x(x+1)^2}dx = \int_0^{+\infty}\frac{arctgx}{(x+1)^2}dx$$

Troviamo:

$$\int\frac{arctgx}{(x+1)^2}dx =$$

Per parti:

$$u = arctgx \quad v = -\frac{1}{x+1}$$

$$du = \frac{dx}{1+x^2} \quad dv = \frac{1}{(x+1)^2}dx$$

$$= -\frac{arctgx}{x+1} + \int\frac{dx}{(x+1)(1+x^2)} =$$

Usiamo il metodo dei fratti semplici:

$$\frac{1}{(x+1)(1+x^2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{A(1+x^2)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(1+x^2)} =$$

$$= \frac{A+Ax^2+Bx^2+Bx+Cx+C}{(x+1)(1+x^2)} = \frac{(A+B)x^2+(B+C)x+A+C}{(x+1)(1+x^2)}$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B=-C \\ A-C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B=-C \\ A=C \\ C+C=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B=-C \\ A=C \\ 2C=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \\ A=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi:

$$\frac{1}{(x+1)(1+x^2)}=\frac{1}{2(x+1)}+\frac{-x+1}{2(1+x^2)}$$

Proseguiamo con il calcolo dell'integrale:

$$=\frac{arctgx}{x+1}+\int\frac{1}{2(x+1)}dx-\int\frac{x}{2(1+x^2)}dx+\int\frac{1}{2(1+x^2)}dx=$$

$$=\frac{arctgx}{x+1}+\frac{1}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{4}\int\frac{2x}{1+x^2}dx+\frac{1}{2}arctgx=$$

$$=\frac{arctgx}{x+1}+\frac{1}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}arctgx+C$$

Quindi:

$$\int\frac{arctgx}{(x+1)^2}dx=\frac{arctgx}{x+1}+\frac{1}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}arctgx+C$$

Consideriamo, l'integrale proposto:

$$\int_0^{+\infty}\frac{arctgx}{(x+1)^2}dx$$

Troviamo:

$$\int_0^z\frac{arctgx}{(x+1)^2}dx=\frac{arctgx}{x+1}+\frac{1}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}arctgx\Bigg|_0^z=$$

$$=\frac{arctgz}{z+1}+\frac{1}{2}\ln(z+1)-\frac{1}{4}\ln(1+z^2)+\frac{1}{2}arctgz-\frac{arctg0}{1}-\frac{1}{2}\ln 1+\frac{1}{4}\ln 1-\frac{1}{2}arctg0=$$

$$=\frac{arctgz}{z+1}+\frac{1}{2}\ln(z+1)-\frac{1}{4}\ln(1+z^2)+\frac{1}{2}arctgz$$

Calcoliamo il limite:

$$\lim_{z\to+\infty}\left(\frac{arctgz}{z+1}+\frac{1}{2}\ln(z+1)-\frac{1}{4}\ln(1+z^2)+\frac{1}{2}arctgz\right)=$$

Osserviamo che:

$$\ln(z+1)\sim\ln z \quad se\ \ z\to+\infty$$

e

$$\ln(1+z^2)\sim\ln z^2 \quad se\ \ z\to+\infty$$

inoltre:

$$\frac{1}{4}\ln z^2 = \frac{1}{4}2\ln z = \frac{1}{2}\ln z$$

Sostituendo:

$$= \lim_{z\to+\infty}\left(\frac{arctgz}{z+1} + \frac{1}{2}\ln z - \frac{1}{2}\ln z + \frac{1}{2}arctgz\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

In conclusione:

$$\int_0^{+\infty}\frac{arctgx}{(x+1)^2}dx = \frac{\pi}{4}$$

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales