Esercizio 28:

Calcolare il seguente integrale.

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx$$

Svolgimento:

Dobbiamo "scomporre" la funzione integranda in "parti" e individuare due funzioni: una che sappiamo integrare ed una che sappiamo derivare. In questo caso sappiamo integrare tutte e due le funzioni ma ci conviene scegliere:

$$g'(x) = (2x+1)^{-\frac{1}{2}}dx \qquad \rightarrow \qquad g(x) = \frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}2} = \sqrt{2x+1}$$

Deriviamo l'altra funzione:

$$f(x) = x \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = dx$$

Applichiamo la formula risolutiva:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

Sostituendo troviamo:

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx = x\sqrt{2x+1} - \int \sqrt{2x+1}\,dx =$$

$$= x\sqrt{2x+1} - \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}2} + C = x\sqrt{2x+1} - \frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3} + C =$$

$$= x\sqrt{2x+1} - \frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C =$$

$$= \sqrt{2x+1}\left(x - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right) + C = \sqrt{2x+1}\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right) + C = \frac{1}{3}\sqrt{2x+1}(x-1) + C$$

Soluzione:

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx = \frac{1}{3}\sqrt{2x+1}(x-1) + C$$

Matilde Consales