Esercizio 17:

Calcolare il seguente integrale.

$$\int \frac{1}{sinx} dx$$

Svolgimento:

Moltiplichiamo numeratore e denominatore per sin$x$:

$$\int \frac{sinx}{sin^2x} dx =$$

Ricordando che $sin^2x = 1 - cos^2x$:

$$= \int \frac{sinx}{1 - cos^2x} dx =$$

Procediamo per sostituzione:

$$t = cosx \qquad dt = -sinxdx$$

Quindi:

$$= -\int \frac{dt}{1 - t^2} =$$

Usiamo il metodo dei fratti semplici:

$$\frac{1}{1 - t^2} = \frac{1}{1 - t}\frac{1}{1 + t} = \frac{A}{1 - t} + \frac{B}{1 + t} = \frac{A(1 + t) + B(1 - t)}{(1 + t)(1 - t)} = \frac{A + At + B - Bt}{(1 + t)(1 - t)} =$$

$$= \frac{(A - B)t + A + B}{(1 + t)(1 - t)} =$$

Uguagliamo le due frazioni:

$$\begin{cases} A - B = 0 \\ A + B = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = B \\ 2B = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = B \\ B = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}$$

L'integrale da calcolare diventa:

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t - 1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1 + t} = \frac{1}{2}(ln|t - 1| - ln|t + 1|) + C$$

Ma allora:

$$\int \frac{1}{sinx} dx = \frac{1}{2}(ln|cosx - 1| - ln|cosx + 1|) + C$$

Scritto meglio:

$$\int \frac{1}{sinx} dx = ln\sqrt{\frac{|cosx - 1|}{|cosx + 1|}} + C$$

Matilde Consales