Esercizio 18:

Calcolare il seguente integrale.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$$

Svolgimento:

Procediamo per sostituzione:

$$t = x + \sqrt{x^2+9} \quad \rightarrow \quad t - x = \sqrt{x^2+9}$$

Eleviamo ambo i membri al quadrato per trovare la *x*:

$$t^2 - 2tx + x^2 = x^2 + 9 \quad \rightarrow \quad t^2 - 2tx = 9 \quad \rightarrow \quad 2tx = t^2 - 9 \quad x = \frac{t^2-9}{2t}$$

Adesso deriviamo ambo i membri per trovare dx:

$$dx = \frac{2t \cdot 2t - 2t^2 + 18}{4t^2}dt \quad \rightarrow \quad dx = \frac{2t^2+18}{4t^2}dt \quad \rightarrow \quad dx = \frac{t^2+9}{2t^2}dt$$

Sostituiamo:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx = \int \frac{\frac{t^2+9}{2t^2}}{\sqrt{\frac{(t^2-9)^2}{4t^2}+9}}dt = \int \frac{\frac{t^2+9}{2t^2}}{\sqrt{\frac{t^4-18t^2+81+36t^2}{4t^2}}}dt =$$

$$= \int \frac{\frac{t^2+9}{2t^2}}{\sqrt{\frac{t^4+18t^2+81}{4t^2}}}dt = \int \frac{\frac{t^2+9}{2t^2}}{\sqrt{\frac{(t^2+9)^2}{4t^2}}}dt = \int \frac{\frac{t^2+9}{2t^2}}{\frac{t^2+9}{2t}}dt = \int \frac{t^2+9}{2t^2}\,\frac{2t}{t^2+9}dt =$$

$$= \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C$$

Quindi:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+9}\right| + C$$

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales