Esercizio 26:

Calcolare il seguente integrale.

$$\int \frac{4}{\sqrt{2x} + \sqrt[3]{2x}} dx$$

Svolgimento:

Procediamo per sostituzione e scegliamo cosa sostituire in modo da eliminare i radicali:

$$t^6 = 2x \quad \rightarrow \quad 6\,t^5 dt = 2dx \quad \rightarrow \quad dx = 3t^5$$

Sostituiamo:

$$\int \frac{4}{\sqrt{2x} + \sqrt[3]{2x}} dx = \int \frac{4}{t^3 + t^2} 3t^5 dt = 12 \int \frac{t^5}{t^2(t+1)} dt = 12 \int \frac{t^3}{t+1} dt$$

È l'integrale di una funzione fratta con numeratore di grado superiore al denominatore. Facciamo la divisione tra polinomi:

$$\begin{array}{l|l}
t^3 & t+1 \\
\cline{2-2}
-t^3-t^2 & t^2-t+1 \\
\hline
\quad -t^2 & \\
\quad t^2+t & \\
\hline
\qquad t & \\
\qquad -t-1 & \\
\hline
\qquad\; -1 &
\end{array}$$

Il quoziente è $t^2 - t + 1$ e il resto è -1 quindi possiamo scrivere:

$$12 \int \frac{t^3}{t+1} dt = 12 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 12 \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right) + C =$$

$$= 4t^3 + 6t^2 + 12t - 12\ln|t+1| + C$$

Non resta che sostituire nuovamente:

$$\int \frac{4}{\sqrt{2x} + \sqrt[3]{2x}} dx = 4\sqrt{2x} + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[6]{2x} - 12\ln\left|\sqrt[6]{2x} + 1\right| + C$$

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales