Esercizio 2

Determinare l'equazione della retta tangente all'iperbole $x^2 - y^2 = 16$ nel punto $P \equiv (5, -3)$.

Svolgimento (METODO GENERALE)

Scrivo l'equazione di un fascio proprio di rette con centro P:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \rightarrow \quad y - (-3) = m(x - 5) \quad \rightarrow \quad y + 3 = mx - 5m$$

Quindi imposto il sistema:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ y = mx - 5m - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - (mx - 5m - 3)^2 - 16 = 0 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - (m^2x^2 + 25m^2 + 9 - 10m^2x - 6mx + 30m) - 16 = 0 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - m^2x^2 - 25m^2 - 9 + 10m^2x + 6mx - 30m - 16 = 0 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 - m^2)x^2 + (10m^2 + 6m)x - 25m^2 - 30m - 25 = 0 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases}$$

La retta deve essere tangente quindi devo trovare m tale che la prima equazione di secondo grado del sistema abbia discriminante nullo.

$$\Delta = (10m^2 + 6m)^2 - 4(1 - m^2)(-25m^2 - 30m - 25) = 0$$

$$100m^4 + 120m^3 + 36m^2 + 100m^2 + 120m + 100 - 100m^4 - 120m^3 - 100m^2 = 0$$

$$36m^2 + 120m + 100 = 0 \quad \rightarrow \quad 9m^2 + 30m + 25 = 0$$

$$m_{1-2} = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 9 * 25}}{9} = \frac{-15 \pm \sqrt{225 - 225}}{9} = -\frac{15}{9} = -\frac{5}{3}$$

Notiamo che il discriminante di questa equazione è zero come dovevamo aspettarci dato che P è proprio il punto di tangenza.
Sostituendo nell'equazione del fascio proprio di rette con centro P ottengo la retta cercata:

$$y = -\frac{5}{3}x - 5\left(-\frac{5}{3}\right) - 3 \quad \rightarrow \quad 3y = -5x + 25 - 9 \quad \rightarrow \quad 3y + 5x - 16 = 0$$

L'equazione della retta tangente all'iperbole data nel punto P vale:

$$5x + 3y - 16 = 0$$

Svolgimento (USO DELLA FORMULA DI SDOPPIAMENTO)

Poiché il punto $P \equiv (5, -3)$ appartiene all'iperbole data infatti:

$$(5)^2 - (-3)^2 = 16 \quad \rightarrow \quad 25 - 9 = 16$$

Posso usare la formula di sdoppiamento.
L'equazione della retta tangente all'iperbole per il punto dato (che appartiene anche all'iperbole) è data da:

$$xx_0 - yy_0 = 16$$

Sostituendo le coordinate del punto P si trova:

$$5x + 3y = 16 \quad \rightarrow \quad 5x + 3y - 16 = 0$$

Prima di disegnare il grafico dell'iperbole osservo che i fuochi si trovano sull'asse x infatti se x=0 si trova $-y^2 = 16$. Questa equazione non ha soluzioni quindi l'iperbole non interseca l'asse y. È un'iperbole equilatera quindi gli asintoti sono le due rette di equazione $y = \pm x$. I due fuochi hanno coordinate $F_1 \equiv (-c, 0)$ e $F_2 \equiv (c, 0)$ dove $c = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.