Esercizio 3

Scrivere l'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli assi che passa per il punto $P \equiv (13, -5)$ e trovare l'equazione della tangente in tale punto.

Svolgimento (METODO GENERALE)

L'iperbole è equilatera quindi la sua equazione generica è data da:

$$x^2 - y^2 = \pm a^2$$

Impongo il passaggio per P:

$$13^2 - (-5)^2 = 169 - 25 = 144 > 0$$

Quindi i fuochi si trovano sull'asse delle ascisse e l'equazione cercata è:

$$x^2 - y^2 = 144$$

Per trovare la tangente alla curva nel punto P scrivo l'equazione del fascio proprio di rette con centro in P:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \rightarrow \quad y - (-5) = m(x - 13) \quad \rightarrow \quad y + 5 = mx - 13m$$

Quindi imposto il sistema:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 144 \\ y = mx - 13m - 5 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x^2 - (mx - 13m + 5)^2 = 144 \\ y = mx - 13m - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - (m^2x^2 + 169m^2 + 25 - 26m^2x + 10mx - 130m) - 144 = 0 \\ y = mx - 13m - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - m^2x^2 - 169m^2 - 25 + 26m^2x - 10mx + 130m - 144 = 0 \\ y = mx - 13m - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 - m^2)x^2 + (26m^2 - 10m)x - 169m^2 + 130m - 169 = 0 \\ y = mx - 13m - 5 \end{cases}$$

La retta deve essere tangente quindi devo trovare m tale che la prima equazione di secondo grado del sistema abbia discriminante nullo.

$$\Delta = (26m^2 + 10m)^2 - 4(1 - m^2)(-169m^2 - 130m - 169) = 0$$

$$676m^4 + 520m^3 + 100m^2 + 676m^2 + 520m + 676 - 676m^4 - 520m^3 - 676m^2 = 0$$

$$100m^2 + 520m + 676 = 0 \quad \rightarrow \quad 25m^2 + 130m + 169 = 0$$

$$m_{1-2} = \frac{-65 \pm \sqrt{65^2 - 25 * 169}}{25} = \frac{-65 \pm \sqrt{4225 - 4225}}{25} = \frac{-65}{25} = -\frac{13}{5}$$

Notiamo che il discriminante di questa equazione è zero come dovevamo aspettarci dato che P è proprio il punto di tangenza.

$$y = -\frac{13}{5}x - 13\left(-\frac{13}{5}\right) - 5 \quad \rightarrow \quad 5y = -13x + 169 - 25 \quad \rightarrow \quad 5y + 13x - 144 = 0$$

L'equazione della retta tangente all'iperbole data nel punto P vale:

$$13x + 5y - 144 = 0$$

Svolgimento (USO DELLA FORMULA DI SDOPPIAMENTO)

Poiché il punto $P \equiv (13, -5)$ appartiene all'iperbole quindi posso usare la formula di sdoppiamento.

L'equazione della retta tangente all'iperbole per il punto dato (che appartiene anche all'iperbole) è data da:

$$xx_0 - yy_0 = 144$$

Sostituendo le so ordinate del punto P si trova:

$$13x + 5y = 144 \quad \rightarrow \quad 13x + 5y - 144 = 0$$

Prima di disegnare il grafico dell'iperbole osservo che i fuochi si trovano sull'asse x infatti se x=0 si trova $-y^2 = 144$. Questa equazione non ha soluzioni quindi l'iperbole non interseca l'asse y. È un'iperbole equilatera quindi gli asintoti sono le due rette di equazione $y = \pm x$. I due fuochi hanno coordinate $F_1 \equiv (-c, 0)\ e\ F_2 \equiv (c, 0)$ dove $c = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$.