Esercizio 8

Data l'iperbole di equazione:

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = -1$$

Determinare i coefficienti angolari delle rette del fascio di centro *C(0, 1)* che:

1. Intersecano l'iperbole in due punti;
2. Sono tangenti all'iperbole;
3. Sono esterne all'iperbole.

Svolgimento

Scriviamo l'equazione di un fascio proprio di rette di centro *C*:

$$y - y_C = m(x - x_C)$$

Sostituendo le coordinate del punto *C* troviamo:

$$y - 1 = m(x - 0) \quad \rightarrow \quad y = mx + 1$$

Consideriamo adesso il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{5} = -1 \\ y = mx + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{(mx+1)^2}{5} = -1 \\ y = mx + 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{m^2x^2 + 2mx + 1}{5} = -1 \\ y = mx + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{5x^2 - 3m^2x^2 - 6mx - 3}{15} = -\dfrac{15}{15} \\ y = mx + 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} (5 - 3m^2)x^2 + 6mx - 3 + 15 = 0 \\ y = mx + 1 \end{cases}$$

Consideriamo la prima equazione e calcoliamo i coefficienti angolari nei vari casi:

$$(5 - 3m^2)x^2 + 6mx + 12 = 0$$

Determiniamo il discriminante:

$$\Delta = (3m)^2 - (5 - 3m^2) \cdot 12$$ [1]

$$\Delta = 9m^2 - 60 + 36m^2 =$$

$$= 45m^2 - 60$$

Calcoliamo ora i valori di m per i quali si annulla:

$$45m^2 - 60 = 0 \quad \rightarrow \quad 3m^2 - 4 = 0$$

$$m^2 = \frac{4}{3} \quad \rightarrow \quad m = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

[1] Dato che il coefficiente del termine di primo grado è pari possiamo usare la formula ridotta.

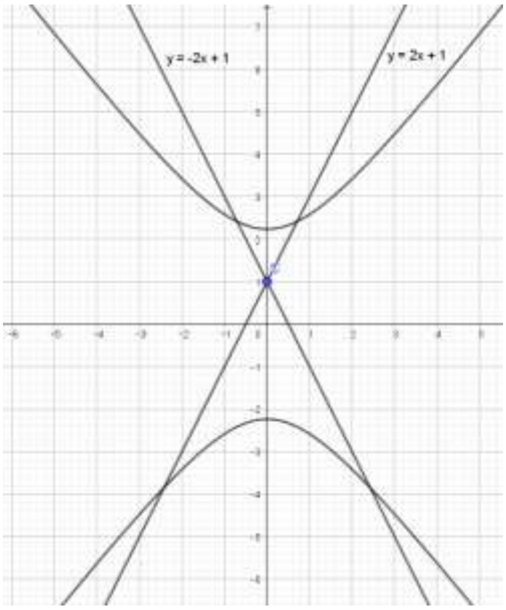
1. Se le rette intersecano l'iperbole in due punti ognuna di esse ha due punti in comune con l'iperbole quindi il discriminante dell'equazione *(1)* è strettamente positivo.

$$\Delta > 0 \quad \rightarrow \quad m < -\frac{2\sqrt{3}}{3}; \quad m > \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Rette che intersecano in due punti l'iperbole:

$$y = kx + 1 \quad con \quad k < -\frac{2\sqrt{3}}{3}; \quad k > \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Facciamo il grafico considerando le due rette con *k=2*:

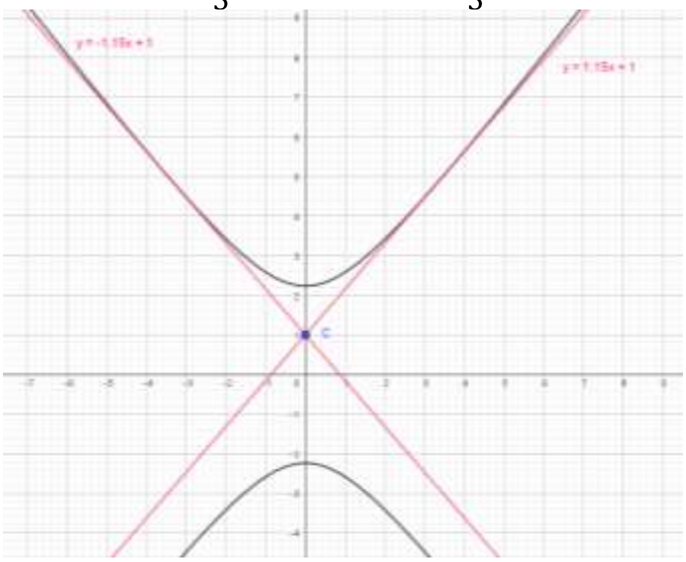


2. Le rette tangenti all'iperbole hanno coefficienti angolari tali che il discriminante dell'equazione *(1)* è nullo.

$$\Delta = 0 \quad \rightarrow \quad m = -\frac{2\sqrt{3}}{3}; \quad m = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Ci sono due rette tangenti:

$$y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x + 1 \quad e \quad y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x + 1$$



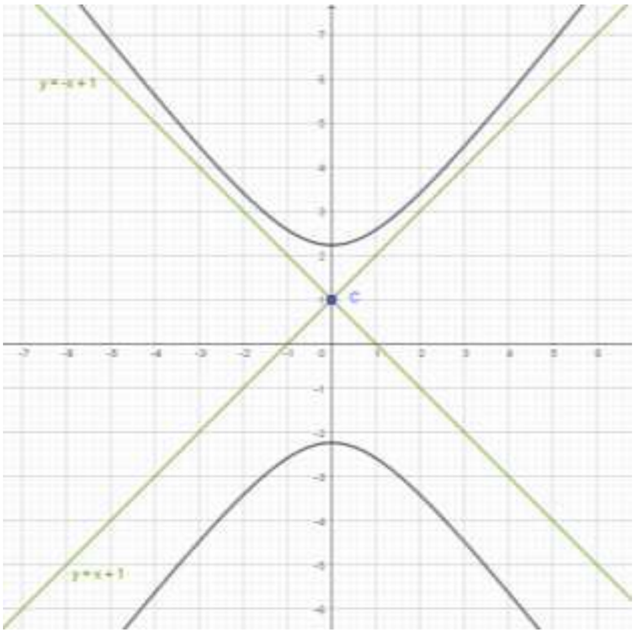
2. Le rette esterne all’iperbole non hanno punti in comune con essa quindi hanno coefficienti angolari tali che il discriminante dell’equazione *(1)* è strettamente negativo.

$$\Delta < 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{2\sqrt{3}}{3} < m < \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Rette esterne all’iperbole:

$$y = kx + 1 \quad con \quad -\frac{2\sqrt{3}}{3} < k < \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Facciamo il grafico considerando le due rette con *k=1*:



Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales