Limite finito quando x tende ad un numero finito.

Si dice che, per x tendente a x_0, la funzione y=f(x) tende ad un limite finito l se, fissato un numero positivo e piccolo a piacere ε, è possibile determinare in corrispondenza di ε un intorno di x_0 per ogni x del quale è verificata la disequazione:

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

Esercizio 1:

Verificare se:

$$\lim_{x \to 3} x + 2 = 5$$

Svolgimento:

Applichiamo la definizione di limite finito quando x tende ad un numero finito. Scegliamo ε>0 piccolo a piacere e scriviamo la disequazione:

$$|x + 2 - 5| < \varepsilon$$

Risolviamo:

$$-\varepsilon < x + 2 - 5 < \varepsilon$$

$$\begin{cases} x - 3 > -\varepsilon \\ x - 3 < \varepsilon \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 3 - \varepsilon \\ x < 3 + \varepsilon \end{cases}$$

Posto x=3 si vede che le due disequazioni sono verificate per ogni ε>0, quindi possiamo scrivere:

$$\lim_{x \to 3} x + 2 = 5$$

Esercizio 2:

Verificare se:

$$\lim_{x \to 5} x - 4 = 3$$

Svolgimento:

Applichiamo la definizione di limite finito quando x tende ad un numero finito. Scegliamo ε>0 piccolo a piacere e scriviamo la disequazione:

$$|x - 4 - 3| < \varepsilon$$

Risolviamo:

$$-\varepsilon < x - 4 - 3 < \varepsilon$$

$$\begin{cases} x - 7 > -\varepsilon \\ x - 7 < \varepsilon \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 7 - \varepsilon \\ x < 7 + \varepsilon \end{cases}$$

Posto x=5 si vede che la prima disequazione non è mai verificata quindi il limite proposto non vale 3.

Esercizio 3:

Verificare se:

$$\lim_{x \to -2} \sqrt{2-x} = 2$$

Svolgimento:

Applichiamo la definizione di limite finito quando x tende ad un numero finito. Scegliamo ε>0 piccolo a piacere e scriviamo la disequazione:

$$\left|\sqrt{2-x} - 2\right| < \varepsilon$$

Risolviamo:

$$-\varepsilon < \sqrt{2-x} - 2 < \varepsilon$$

$$\begin{cases} \sqrt{2-x} - 2 > -\varepsilon \\ \sqrt{2-x} - 2 < \varepsilon \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{2-x} > 2 - \varepsilon \\ \sqrt{2-x} < 2 + \varepsilon \end{cases}$$

Eleviamo al quadrato:

$$\begin{cases} 2 - x > 4 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 \\ 2 - x < 4 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x > 4 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - 2 \\ -x < 4 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x > 2 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 \\ -x < 2 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < -\varepsilon^2 + 2\varepsilon - 2 \\ x > -\varepsilon^2 - 2\varepsilon - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < -2 - \varepsilon^2 + 2\varepsilon \\ x > -2 - \varepsilon^2 - 2\varepsilon \end{cases}$$

Posto x=-2 si vede che le due disequazioni sono sempre verificate.
Facciamo una prova. Poniamo ε=0,1 e facciamo i calcoli.
La prima disequazione diventa -2<-1,81 è vera. La seconda disequazione diventa -2>-2,21 è vera.
Possiamo scrivere:

$$\lim_{x \to -2} \sqrt{2-x} = 2$$

Limite finito quando x tende ad infinito.

Si dice che per x che tende ad infinito ($-\infty$ o $+\infty$), la funzione y=f(x) tende al limite finito l se, fissato un numero positivo e piccolo a piacere ε, è possibile determinare in corrispondenza di ε, un numero positivo N tale che per ogni $|x| > N$ sia verificata:

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

Esercizio 4:

Verificare che:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x+1}{1-2x} = -\frac{3}{2}$$

Svolgimento:

Applichiamo la definizione di limite finito quando x tende ad un numero infinito. Scegliamo ε>0 piccolo a piacere e scriviamo la disequazione:

$$\left|\frac{3x+1}{1-2x}+\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{6x+2+3-6x}{1-2x}\right|<\varepsilon \quad \rightarrow \quad \left|\frac{5}{1-2x}\right|<\varepsilon$$

$$-\varepsilon<\frac{5}{1-2x}<\varepsilon$$

$$\begin{cases}\dfrac{5}{1-2x}>-\varepsilon \\ \\ \dfrac{5}{1-2x}<\varepsilon\end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases}5>-\varepsilon(1-2x) \\ \\ 5<\varepsilon(1-2x)\end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases}5>-\varepsilon+2\varepsilon x \\ \\ 5<\varepsilon-2\varepsilon x\end{cases}$$

$$\begin{cases}5+\varepsilon>2\varepsilon x \\ \\ 5-\varepsilon<-2\varepsilon x\end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases}x<\dfrac{5+\varepsilon}{2\varepsilon} \\ \\ -x>\dfrac{5-\varepsilon}{2\varepsilon}\end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases}x<\dfrac{5+\varepsilon}{2\varepsilon} \\ \\ x<\dfrac{\varepsilon-5}{2\varepsilon}\end{cases}$$

Si vede che se x è in un intorno di $-\infty$ le due relazioni sono sempre verificate.

Quindi possiamo scrivere:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+1}{1-2x}=-\frac{3}{2}$$

Limite infinito quando x tende ad un numero finito.

Si dice che per x che al tendere di x ad x_0, la funzione y=f(x) tende a $+\infty$ o a $-\infty$ se, fissato un numero positivo e grande a piacere M, è possibile determinare in corrispondenza di M, un intorno di x_0 per ogni x del quale (escluso x_0) è verificata la condizione:

$$|f(x)|>M$$

Esercizio 5:

Verificare che:

$$\lim_{x\to-3}\frac{2}{(x+3)^2}=+\infty$$

Svolgimento:

Applichiamo la definizione di limite infinito quando x tende ad un numero finito. Scegliamo M>0 grande a piacere e scriviamo la disequazione:

$$\frac{2}{(x+3)^2}>M$$

Il valore assoluto è superfluo perché la funzione data è sempre positiva. Risolviamo la disequazione.

$$2 > M(x+3)^2 \quad \rightarrow \quad 2 > Mx^2 + 6Mx + 9M \quad \rightarrow \quad Mx^2 + 6Mx + 9M - 2 < 0$$

Risolviamo l'equazione:

$$Mx^2 + 6Mx + 9M - 2 = 0$$

$$x_{1-2} = \frac{-3M \pm \sqrt{9M^2 - 9M^2 + 2M}}{M} = \frac{-3M \pm \sqrt{2M}}{M} = -3 \pm \frac{\sqrt{2M}}{M}$$

Che è verificata per:

$$-3 - \frac{\sqrt{2M}}{M} < x < -3 + \frac{\sqrt{2M}}{M}$$

Questa condizione è vera per ogni M grande a piacere. Vedi figura 1.

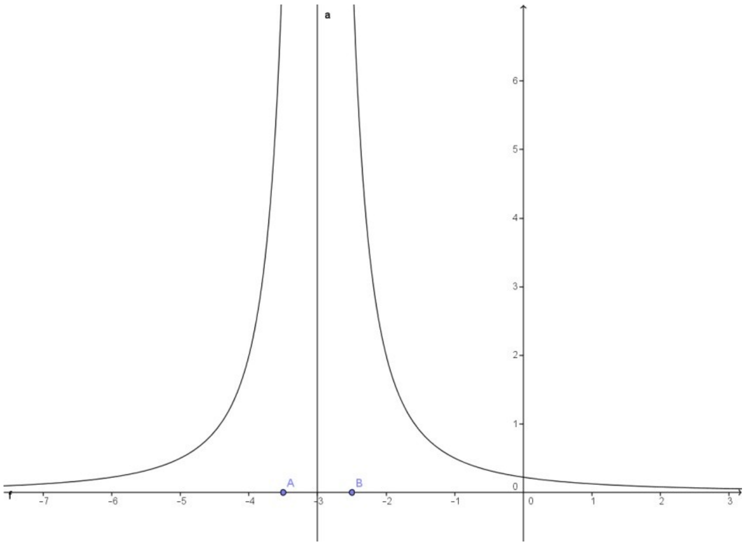

Figura 1

Limite infinito quando x tende ad un numero finito.

Si dice che, per x tendente a x_0, la funzione y=f(x) tende ad un infinito al tendere di x ad infinito se, fissato un numero positivo e grande a piacere M, è possibile determinare in corrispondenza di M un numero positivo N tale che per ogni:

$$|x| > N$$

Risulti:

$$|f(x)| > M$$

Esercizio 6:

Verificare che:

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 - 4 = +\infty$$

Svolgimento:

Applichiamo la definizione di limite infinito quando x tende ad un numero finito. Scegliamo M>0 grande a piacere e scriviamo la disequazione:

$$|x^2 - 4| > M$$

Notiamo che[1]:

$$|x^2-4| = x^2-4 \; se \; x < -2; x > 2 \quad e \quad |x^2-4| = 4-x^2 \; se -2 < x < 2$$

Qui ci interessa l'intervallo x<-2 perché x tende a $-\infty$ quindi scriviamo:

$$x^2-4 > M \quad \rightarrow \quad x^2 > 4+M$$

Risolviamo l'equazione:

$$x^2 = 4+M$$

$$x_{1-2} = \pm\sqrt{4+M}$$

La disequazione è verificata per:

$$x < -\sqrt{4+M} \qquad x > \sqrt{4+M}$$

Ci interessa la prima disequazione perché x tende a $-\infty$. Si vede che per quanto grande scelga M posso sempre trovare un numero positivo N tale che, posto x=-N, la disequazione sia verificata (vedi figura 2).

Ma allora posso scrivere:

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 - 4 = +\infty$$

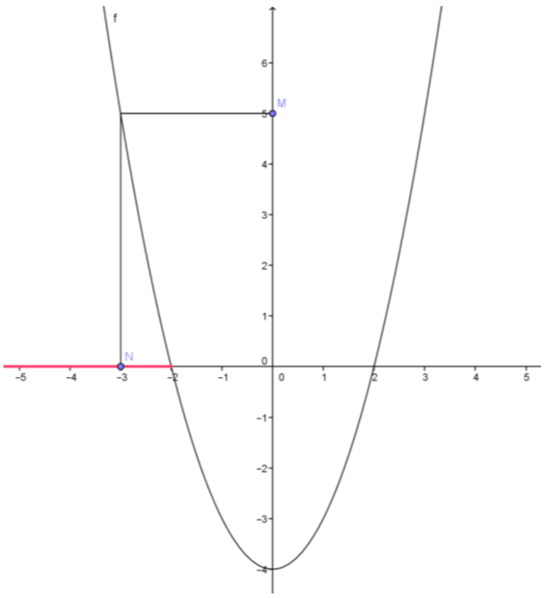

Figura 2

[1] Risolvere le disequazioni di secondo grado $x^2 - 4 > 0$ e $x^2 - 4 < 0$.