Limite della somma[1] di due o più funzioni. *Prima forma indeterminata.*

Date due funzioni y=f(x) definita nell'insieme F e g(x) definita nell'insieme G, se

- *l'insieme $F \cap G$ non è vuoto e non è costituito solo da punti isolati*
- *indicato con x_0 un punto di accumulazione appartenente o meno a $F \cap G$ se risulta*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \quad e \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$$

allora sarà anche:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = l_1 + l_2$$

Se le due funzioni hanno per limite $+\infty$ e $-\infty$ quanto appena scritto non vale. Infatti la forma

$$+\infty - \infty$$

Può assumere qualsiasi valore. Si tratta di una ***forma indeterminata***.
In alcuni casi è possibile trovare comunque il limite. Vediamo come.

Esercizio 1:

Date le funzioni

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2} \qquad e \qquad g(x) = \frac{1}{x}$$

Calcolare il limite per $x \to 0^-$ della loro somma.

Svolgimento:

$f(x)$ è definita nell'insieme $F = \{x: x \in R \wedge x \neq 0\}$
$g(x)$ è definita nell'insieme $G = \{x: x \in R \wedge x \neq 0\}$
Intersezione: $F \cap G = \{x: x \in R \wedge x \neq 0\}$
x_0 non appartiene a $F \cap G$
Calcoliamo i limiti delle funzioni:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1-x}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Non possiamo applicare il teorema perché ci troviamo di fronte alla forma indeterminata $+\infty - \infty$.
Procediamo nel seguente modo:

$$\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1-x}{x^2} + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1-x+x}{x^2} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Facciamo il grafico con Geogebra.

[1] Vale anche per la differenza di due funzioni.

In figura 1 f(x) è in azzurro, g(x) in verde e la funzione data dalla loro somma in rosso.

Si vede che quello che abbiamo fatto è corretto.

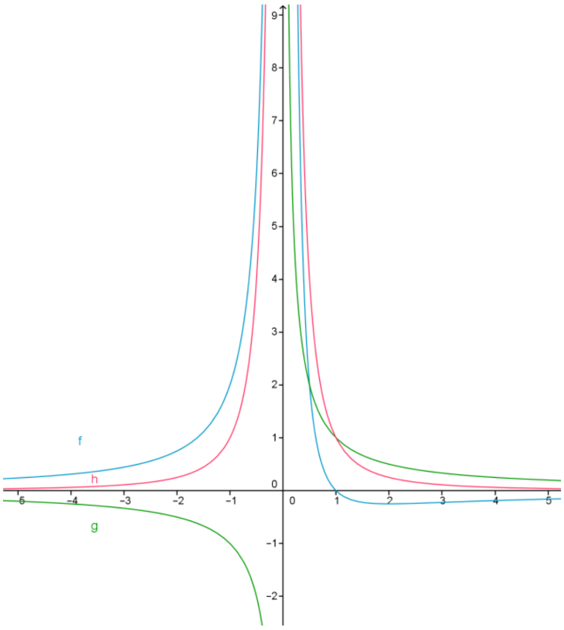

Figura 1 Grafici di f(x), g(x) e della loro somma.

Limite del prodotto di due o più funzioni. *Seconda forma indeterminata.*

Date due funzioni y=f(x) definita nell'insieme F e g(x) definita nell'insieme G, se

- *l'insieme* $F \cap G$ *non è vuoto e non è costituito solo da punti isolati*
- *indicato con* x_0 *un punto di accumulazione appartenente o meno a* $F \cap G$ *se risulta*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \quad e \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$$

allora sarà anche:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = l_1 \cdot l_2$$

Se una delle due funzioni è infinitesima (tende a zero) e l'altra è infinita (tende a $+\infty$ o a $-\infty$) quanto appena scritto non vale. Infatti la forma

$$0 \cdot \infty$$

Può assumere qualsiasi valore. Si tratta di una ***forma indeterminata***.
In alcuni casi è possibile trovare comunque il limite. Vediamo come.

Esercizio 2:

Date le funzioni

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 \qquad e \qquad g(x) = \frac{x+3}{x^2 - x}$$

Calcolare il limite per $x \to 1$ del loro prodotto.

Svolgimento:

$f(x)$ è definita nell'insieme $F = \{x: x \in R\}$

$g(x)$ è definita nell'insieme $G = \{x: x \in R \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 1\}$

Intersezione: $F \cap G = \{x: x \in R \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 1\}$

x_0 non appartiene a $F \cap G$

Calcoliamo i limiti delle funzioni:

$$\lim_{x \to 1} x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+3}{x^2 - x} = \infty$$

Non possiamo applicare il teorema perché ci troviamo di fronte alla forma indeterminata $0 \cdot \infty$.

Procediamo nel seguente modo:

$$\lim_{x \to 1}(x^2 - 4x + 3)\frac{x+3}{x^2 - x} = \lim_{x \to 1}(x-1)(x-3)\frac{x+3}{x(x-1)} = \lim_{x \to 1}\frac{(x+3)(x-3)}{x} = -8$$

Facciamo il grafico con Geogebra.

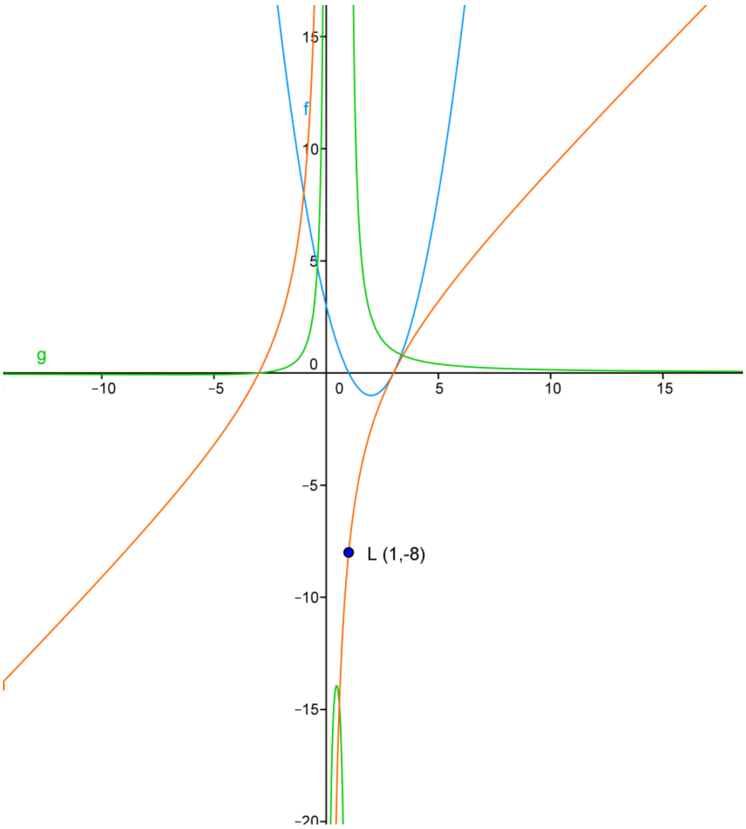

Figura 2 Grafici di f(x), g(x) e del loro prodotto.

In figura 2 f(x) è in azzurro, g(x) in verde e la funzione data dalla loro somma in rosso.

Si vede che quello che abbiamo fatto è corretto.

Limite del quoziente di due funzioni. ***Terza e quarta forma indeterminata.***

Date due funzioni y=f(x) definita nell'insieme F e g(x) definita nell'insieme G, se

- *l'insieme $F \cap G$ non è vuoto e non è costituito solo da punti isolati*
- *indicato con x_0 un punto di accumulazione appartenente o meno a $F \cap G$ in un intorno del quale (escluso x_0) la funzione g(x) non si annulla mai, se risulta:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \quad e \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$$

Allora sarà anche:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$$

Se i limiti sono entrambi nulli il teorema cade in difetto e si ha la *terza forma indeterminata:*

$$\frac{0}{0}$$

Esercizio 3:

Date le funzioni

$$f(x) = x^2 + 3x \qquad e \qquad g(x) = x^3 - x$$

Calcolare il limite per $x \to 0$ di:

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

Svolgimento:

$f(x)$ è definita nell'insieme $F = \{x : x \in R\}$
$g(x)$ è definita nell'insieme $G = \{x : x \in R\}$
Intersezione: $F \cap G = \{x : x \in R\}$
$x_0 \in F \cap G$
Calcoliamo i limiti delle funzioni:

$$\lim_{x \to 0} x^2 + 3x = 0$$

$$\lim_{x \to 0} x^3 - x = 0$$

Non possiamo applicare il teorema perché ci troviamo di fronte alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$

Procediamo nel seguente modo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 3x}{x^3 - x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x+3)}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x+3}{x^2 - 1} = -3$$

Facciamo il grafico con Geogebra.

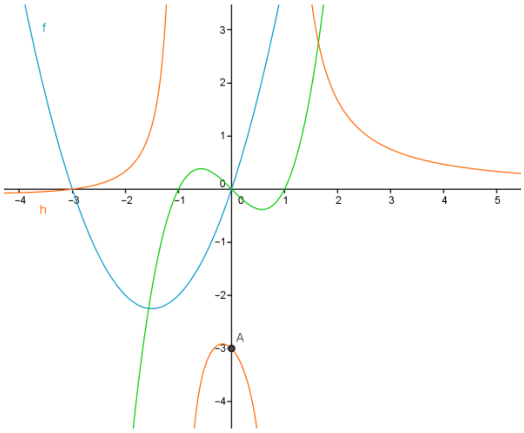

Figura 3 Grafici di f(x), g(x) e di f(x)/g(x).

In figura 3 f(x) è in azzurro, g(x) in verde e la funzione data dalla loro somma in rosso.

Si vede che quello che abbiamo fatto è corretto.

Se i limiti sono entrambi ifiniti il teorema cade in difetto e si ha la *quarta forma indeterminata:*

$$\frac{\infty}{\infty}$$

Questa forma indeterminata si verifica sempre nel caso del limite per x tendente ad infinito del quoziente di due funzioni algebriche razionali cioè di una funzione razionale fratta. Si hanno 3 casi che analizzeremo con esempi:

Esercizio 4 (*il grado del numeratore è maggiore del grado del denominatore)*:

Date le funzioni

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + x + 1 \qquad e \qquad g(x) = x^2 - x + 2$$

Calcolare il limite per $x \to +\infty$ di:

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

Svolgimento:

Calcoliamo i limiti delle funzioni:

$$\lim_{x \to +\infty} x^4 - 3x^2 + x + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 - x + 2 = +\infty$$

Non possiamo applicare il teorema perché ci troviamo di fronte alla forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

Procediamo nel seguente modo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - 3x^2 + x + 1}{x^2 - x + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4\left(1 - 3\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)}{x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(1 - 3\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)}{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = +\infty$$

Facciamo il grafico con Geogebra:

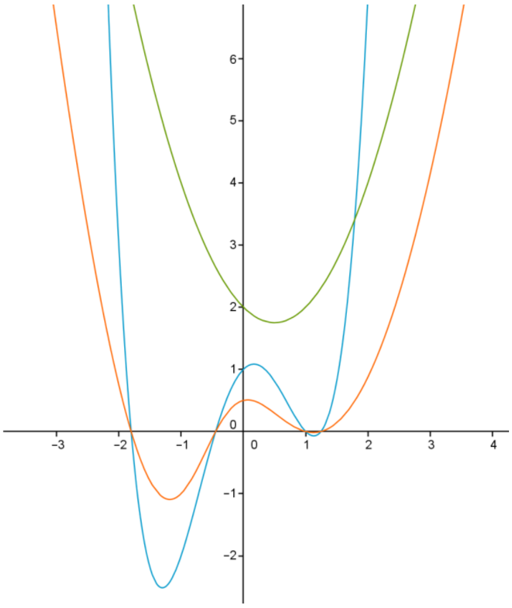

Figura 4 Grafici di f(x), g(x) e di f(x)/g(x).

In figura 4 f(x) è in azzurro, g(x) in verde e la funzione data dalla loro somma in rosso.

Si vede che quello che abbiamo fatto è corretto: il quoziente delle due funzioni tende ad infinito.

Esercizio 5 (*il grado del numeratore è uguale al grado del denominatore)*:

Date le funzioni

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 + x - 7 \qquad e \qquad g(x) = 2x^3 - x^2 + 4$$

Calcolare il limite per $x \to +\infty$ di:

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

Svolgimento:

Calcoliamo i limiti delle funzioni:

$$\lim_{x\to+\infty} 4x^3 + 2x^2 + x - 7 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^3 - x^2 + 4 = +\infty$$

Non possiamo applicare il teorema perché ci troviamo di fronte alla forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

Procediamo nel seguente modo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3 + 2x^2 + x - 7}{2x^3 - x^2 + 4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(4 + 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{7}{x^3}\right)}{x^3\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^3}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4 + 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{7}{x^3}}{2 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^3}} = 2$$

Facciamo il grafico con Geogebra:

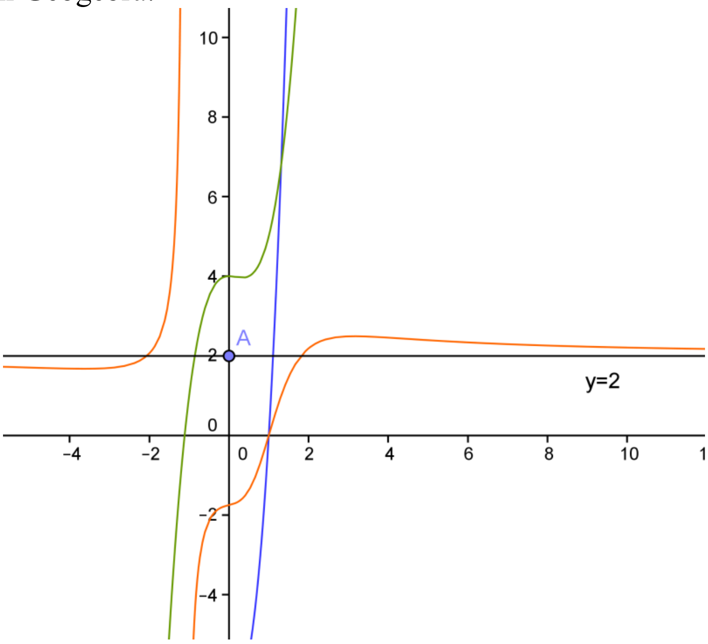

Figura 5 Grafici di f(x), g(x), f(x)/g(x) e dell'asintoto y=2.

In figura 5 f(x) è in azzurro, g(x) in verde e la funzione data dalla loro somma in rosso.

Si vede che quello che abbiamo fatto è corretto: il quoziente delle due funzioni tende a 2 (asintoto orizzontale).

Esercizio 4 (*il grado del numeratore è minore del grado del denominatore)*:

Date le funzioni

$$f(x) = 2x + 1 \qquad e \qquad g(x) = x^2 - 3x + 4$$

Calcolare il limite per $x \to +\infty$ di:

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

Svolgimento:

Calcoliamo i limiti delle funzioni:

$$\lim_{x\to+\infty} 2x + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 - 3x + 4 = +\infty$$

Non possiamo applicare il teorema perché ci troviamo di fronte alla forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

Procediamo nel seguente modo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x^2-3x+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{x\left(1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} = 0$$

Facciamo il grafico con Geogebra:

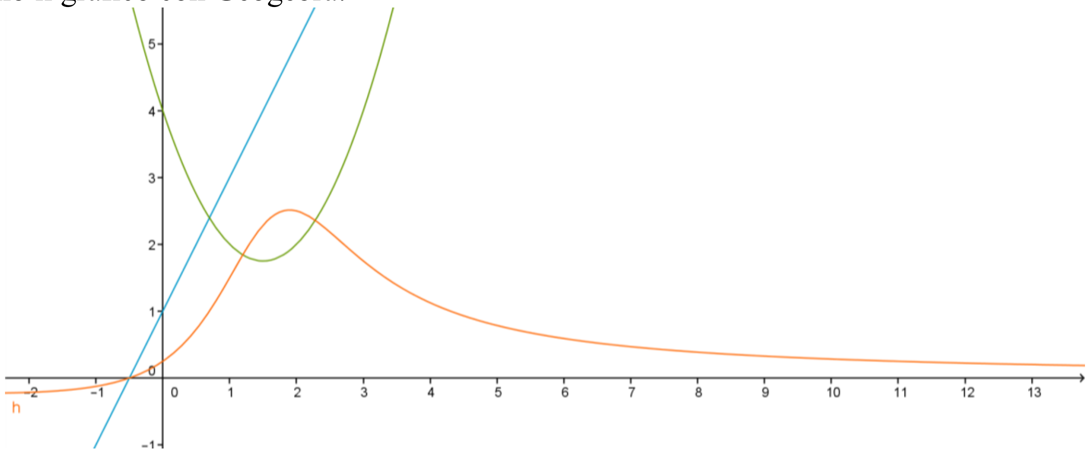

Figura 6 Grafici di f(x), g(x) e di f(x)/g(x).

In figura 6 f(x) è in azzurro, g(x) in verde e la funzione data dalla loro somma in rosso.

Si vede che quello che abbiamo fatto è corretto: il quoziente delle due funzioni tende a 0 (asintoto orizzontale).