Esercizio 1

Calcolare:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{tg^3x}-1}{x\left(cosx-e^{x^2}\right)}$$

Svolgimento

Sviluppiamo in serie di Taylor la funzione tgx in un intorno di $x=0$. Calcoliamo la derivata prima e la derivata seconda:

$$f'(x)=\frac{cos^2x+sin^2x}{cos^2x}=\frac{1}{cos^2x} \qquad f'(0)=1$$

$$f^2(x)=\frac{2sinx\cdot cosx}{cos^4x}=\frac{2sinx}{cos^3x} \qquad f''(0)=0$$

Quindi, poiché $f(0)=0$:

$$tgx=x+o(x) \quad per\ x\to 0$$

Elevando al cubo si trova:

$$tg^3x=[x+o(x)]^3=x^3+o(x^3)+3x^2o(x)+3x\cdot o(x^2)=x^3+o(x^3) \quad per\ x\to 0$$

Adesso sviluppiamo in serie di Taylor e^x:

$$f(0)=1$$

$$f'(x)=e^x \qquad f'(0)=1$$

Possiamo fermarci e scrivere:

$$e^x=1+x+o(x) \quad per\ x\to 0$$

Sostituendo otteniamo:

$$e^{tg^3x}=1+x^3+o(x^3)+o(x)=1+x^3+o(x^3) \quad per\ x\to 0$$

Sviluppiamo in serie di Taylor $cosx$:

$$f(0)=1$$

$$f'(x)=-sinx \qquad f'(0)=0$$

$$f''(x)=-cosx \qquad f''(0)=-1$$

$$cosx=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2) \quad per\ x\to 0$$

Ci manca da calcolare lo sviluppo in serie di Taylor di e^{x^2}:

$$e^{x^2}=1+x^2+o(x^2) \quad per\ x\to 0$$

Sostituiamo gli sviluppi in serie appena calcolati:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{tg^3x}-1}{x\left(cosx-e^{x^2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^3+o(x^3)-1}{x\left\{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-[1+x^2+o(x^2)]\right\}}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{x\left\{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x^2 - o(x^2)\right\}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{-\frac{3}{2}x^3 + o(x^3)} = -\frac{2}{3}$$

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales