O-piccolo o di Landau:

Questo metodo permette di semplificare notevolmente il calcolo di alcuni limiti. Si usa quando siamo di fronte a limiti di somme di funzioni che “vanno a zero con diverse velocità”. Possiamo, infatti, stabilire quali sono i termini che “contano” in un limite. Si usa spessissimo insieme allo sviluppo in serie di Taylor.

Definizione.

Siano *f(x)* e *g(x)* due funzioni reali definite in un intervallo $(a,b)\backslash\{x_0\}$ e *infinitesime* per $x \to x_0$ cioè sia:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

Si dice che $f = o(g)$ (*f è o piccolo di g*) se:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Quindi la funzione *f* si annulla più rapidamente della funzione *g* per $x \to x_0$.

Esempio.

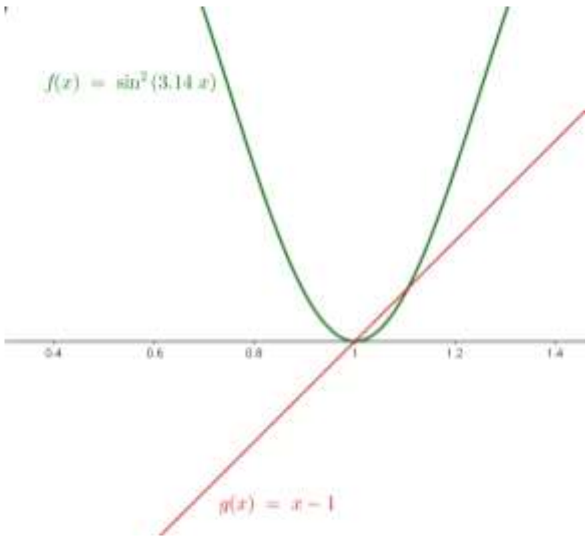
Consideriamo, ad esempio, le funzioni:

$$f(x) = sin^2(\pi x) \quad e \quad g(x) = x - 1 \;\; nel\, punto\; x_0 = 1$$

Possiamo dire che *f=o(g)*. Infatti

$$\lim_{x\to 1} \frac{sin^2(\pi x)}{x - 1} = 0$$

Come si può vedere dal grafico *f(x)* va a zero più rapidamente di *g(x)* nel punto di ascissa 1.



Proprietà.

1. $o(f) + o(f) = o(f) \;\; per\; x \to x_0,$
2. $g \cdot o(f) = o(g \cdot f) \;\; per\; x \to x_0,$
3. $o(o(f)) = o(f) \;\; per\; x \to x_0,$
4. $o(+ o(f)) = o(f) \;\; per\; x \to x_0,$

5. Se $g(x) \neq 0 \; per \; ogni \; x \neq x_0$ e

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Allora:

$$f(x) = g(x) + o\big(g(x)\big) \;\; per \;\; x \to x_0$$

6. Se

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = a \quad con \;\; a \in \mathbb{R}; a \neq 0$$

Allora:

$$o\big(g(x) \cdot f(x)\big) = o\big(f(x)\big) \;\; per \;\; x \to x_0$$

7. Siano

- $\Phi: X \to Y$
- y_0 un punto di accumulazione[1] per $Y \; sottoinsieme \; di \; \mathbb{R}$
- $\lim_{y \to y_0} \Phi(x) = x_0$
- $f(x_0) = 0 \;\; oppure \;\; x_0 \; non \; appartenga \; a \; \Phi(Y)$

Se $f(x) = o\big(g(x)\big) \;\; per \; x \to x_0$ allora

$$f\big(\Phi(y)\big) = o\Big(g\big(\Phi(y)\big)\Big) \;\; per \;\; y \to y_0$$

Lo sviluppo in serie di Taylor.

Per semplificare il calcolo di limiti complessi possiamo servirci dello sviluppo in serie di Taylor che ci permette di approssimare **localmente** una funzione mediante un polinomio. La funzione *f(x)* è espressa, in un intorno di un punto x_0, dalla relazione:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R(x)$$

Dove *R(x)* è il resto ed è un infinitesimo di ordine superiore a *n*.

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales

[1] Sia E un sottoinsieme di ℝ. Si dice che c è un punto di accumulazione per l'insieme E se ogni intorno di c contiene almeno un elemento dell'insieme E diverso da c.