Esercizio 1

Data la matrice hermitiana:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ -i & 0 & i \\ i & -i & 0 \end{pmatrix}$$

Verificare che gli autovalori sono reali e che gli autovettori sono mutuamente ortogonali.

Svolgimento

Per trovare gli autovalori scriviamo il polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & i & -i \\ -i & -\lambda & i \\ i & -i & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1}(-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & i \\ -i & -\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} i \begin{vmatrix} -i & i \\ i & -\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(-i)\begin{vmatrix} -i & -\lambda \\ i & -i \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda(\lambda^2 + i^2) - i(i\lambda - i^2) - i(i^2 + \lambda i) = -\lambda(\lambda^2 - 1) - i(i\lambda + 1) - i(-1 + \lambda i) =$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 1) - i^2\lambda - i + i - i^2\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 1) + \lambda + \lambda = -\lambda(\lambda^2 - 1) + 2\lambda = -\lambda^3 + 3\lambda$$

Polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda$$

Gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico.

$$-\lambda^3 + 3\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 - 3) = 0$$

Autovalori:

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = -\sqrt{3}, \qquad \lambda_3 = \sqrt{3}$$

Abbiamo verificato che gli autovalori sono reali.

Adesso troviamo gli autovettori.
Consideriamo il primo autovalore: $\lambda_1 = 0$.

$$A - \lambda_1 I_3 = v_1$$

Esplicitando:

$$\begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ -i & 0 & i \\ i & -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} 0 \cdot x + iy - iz = 0 \\ -ix + 0 \cdot y + iz = 0 \\ ix - iy + 0 \cdot z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} iy - iz = 0 \\ -ix + iz = 0 \\ ix - iy = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} iy = iz \\ ix = iz \\ ix = iy \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = z \\ x = z \\ x = y \end{cases}$$

Una possibile soluzione del sistema è data da:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Quindi l'autovettore v_1 associato all'autovalore $\lambda_1=0$ vale:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo il secondo autovalore: $\lambda_2 = -\sqrt{3}$.

$$A - \lambda_2 I_3 = v_2$$

Esplicitando:

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & i & -i \\ -i & -\sqrt{3} & i \\ i & -i & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} -\sqrt{3}x + iy - iz = 0 \\ -ix + -\sqrt{3}y + iz = 0 \\ ix - iy - \sqrt{3}z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} iy = \sqrt{3}x + iz \\ iy = ix - \sqrt{3}z \\ -ix - \sqrt{3}y + iz = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x + iz = ix - \sqrt{3}z \\ iy = ix - \sqrt{3}z \\ -ix - \sqrt{3}y + iz = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\sqrt{3} - i)x = -(\sqrt{3} + i)z \\ iy = ix - \sqrt{3}z \\ -ix - \sqrt{3}y + iz = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{(\sqrt{3} + i)}{\sqrt{3} - i} z \\ iy = -i\dfrac{(\sqrt{3} + i)}{\sqrt{3} - i} z - \sqrt{3}z \\ -ix - \sqrt{3}y + iz = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{(\sqrt{3} + i)}{\sqrt{3} - i} z \\ iy = \dfrac{-i\sqrt{3} - i^2 - \sqrt{3}(\sqrt{3} - i)}{\sqrt{3} - i} z \\ -ix - \sqrt{3}y + iz = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{(\sqrt{3} + i)}{\sqrt{3} - i} z \\ iy = \dfrac{-i\sqrt{3} + 1 - 3 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i} z \\ -ix - \sqrt{3}y + iz = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{(\sqrt{3}+i)}{\sqrt{3}-i}z \\ iy = \dfrac{-2}{\sqrt{3}-i}z \\ -ix-\sqrt{3}y+iz=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{(\sqrt{3}+i)}{\sqrt{3}-i}z \\ y = \dfrac{-2}{i(\sqrt{3}-i)}z \\ -ix-\sqrt{3}y+iz=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{(\sqrt{3}+i)}{\sqrt{3}-i}z \\ y = \dfrac{i2}{\sqrt{3}-i}z \\ -ix-\sqrt{3}y+iz=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{(\sqrt{3}+i)}{\sqrt{3}-i}z \\ y = \dfrac{i2}{\sqrt{3}-i}z \\ \dfrac{(\sqrt{3}+i)i}{\sqrt{3}-i}z - \dfrac{i2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}z + iz = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{(\sqrt{3}+i)}{\sqrt{3}-i}z \\ y = \dfrac{i2}{\sqrt{3}-i}z \\ \dfrac{i\sqrt{3}+i^2-i2\sqrt{3}+i\sqrt{3}-i^2}{\sqrt{3}-i}z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{(\sqrt{3}+i)}{\sqrt{3}-i}z \\ y = \dfrac{i2}{\sqrt{3}-i}z \\ 0\cdot z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ y = \dfrac{i2}{\sqrt{3}-i} \\ x = -\dfrac{(\sqrt{3}+i)}{\sqrt{3}-i} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{(\sqrt{3}+i)}{\sqrt{3}-i} \\ y = \dfrac{i2}{\sqrt{3}-i} \\ z = 1 \end{cases}$$

Mettiamo in evidenza parte reale e parte immaginaria dei componenti del vettore:

$$x = -\frac{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} = -\frac{3+i2\sqrt{3}-1}{4} = \frac{-2-i2\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = \frac{i2(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} = \frac{i2\sqrt{3}-2}{4} = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Quindi l'autovettore v_2 associato all'autovalore $\lambda_2 = -\sqrt{3}$ vale:

$$v_2 = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo il terzo autovalore: $\lambda_3 = \sqrt{3}$.

$$A - \lambda_3 I_3 = v_3$$

Esplicitando:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & i & -i \\ -i & \sqrt{3} & i \\ i & -i & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{3}x + iy - iz = 0 \\ -ix + \sqrt{3}y + iz = 0 \\ ix - iy + \sqrt{3}z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x + iy - iz = 0 \\ ix = \sqrt{3}y + iz \\ ix = iy - \sqrt{3}z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x + iy - iz = 0 \\ \sqrt{3}y + iz = iy - \sqrt{3}z \\ ix = \sqrt{3}y + iz \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}x + iy - iz = 0 \\ (\sqrt{3} - i)y = -(\sqrt{3} + i)z \\ ix = \sqrt{3}y + iz \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x + iy - iz = 0 \\ y = -\dfrac{(\sqrt{3} + i)}{\sqrt{3} - i} z \\ ix = \sqrt{3}y + iz \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}x + iy - iz = 0 \\ y = -\dfrac{(\sqrt{3} + i)}{\sqrt{3} - i} z \\ ix = -\sqrt{3}\dfrac{(\sqrt{3} + i)}{\sqrt{3} - i} z + iz \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ix = \dfrac{-3 - i\sqrt{3} + i\sqrt{3} - i^2}{\sqrt{3} - i} z \\ y = -\dfrac{(\sqrt{3} + i)}{\sqrt{3} - i} z \\ \sqrt{3}x + iy - iz = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ix = \dfrac{-2}{\sqrt{3} - i} z \\ y = -\dfrac{(\sqrt{3} + i)}{\sqrt{3} - i} z \\ \sqrt{3}x + iy - iz = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2i}{\sqrt{3} - i} z \\ y = -\dfrac{(\sqrt{3} + i)}{\sqrt{3} - i} z \\ \sqrt{3}x + iy - iz = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}\dfrac{2i}{\sqrt{3} - i} z - i\dfrac{(\sqrt{3} + i)}{\sqrt{3} - i} z - iz = 0 \\ x = \dfrac{2i}{\sqrt{3} - i} z \\ y = -\dfrac{(\sqrt{3} + i)}{\sqrt{3} - i} z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{i2\sqrt{3} - i\sqrt{3} - i^2 - i\sqrt{3} + i^2}{\sqrt{3} - i} z = 0 \\ x = \dfrac{2i}{\sqrt{3} - i} z \\ y = -\dfrac{(\sqrt{3} + i)}{\sqrt{3} - i} z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 \cdot z = 0 \\ x = \dfrac{2i}{\sqrt{3} - i} z \\ y = -\dfrac{(\sqrt{3} + i)}{\sqrt{3} - i} z \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 1 \\ x = \dfrac{i2}{\sqrt{3} - i} \\ y = -\dfrac{\left(\sqrt{3} + i\right)}{\sqrt{3} - i} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{i2}{\sqrt{3} - i} \\ y = -\dfrac{\left(\sqrt{3} + i\right)}{\sqrt{3} - i} \\ z = 1 \end{cases}$$

Mettiamo in evidenza parte reale e parte immaginaria dei componenti del vettore:

$$x = \frac{i2\left(\sqrt{3} + i\right)}{\left(\sqrt{3} - i\right)\left(\sqrt{3} + i\right)} = \frac{i2\sqrt{3} - 2}{4} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = -\frac{\left(\sqrt{3} + i\right)\left(\sqrt{3} + i\right)}{\left(\sqrt{3} - i\right)\left(\sqrt{3} + i\right)} = -\frac{3 + i2\sqrt{3} - 1}{4} = \frac{-2 - i2\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Quindi l'autovettore v_3 associato all'autovalore $\lambda_3 = \sqrt{3}$ vale:

$$v_3 = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Non ci resta che verificare che i tre autovettori sono mutuamente ortogonali. Calcoliamo i prodotti scalari.

$$v_1 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = -1 + 1 = 0$$

I due vettori sono ortogonali.

$$v_1 \cdot v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = -1 + 1 = 0$$

Ricordiamo che due vettori complessi sono tra loro ortogonali se il prodotto scalare del primo per il coniugio del secondo è nullo. Quindi calcoliamo:

$$v_2 \cdot v_3^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 =$$

$$= \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4} + 1 = \frac{1 - 3 + 1 - 3 + 4}{4} = 0$$

Abbiamo verificato che i tre autovettori sono mutuamente ortogonali.

Matilde Consales