Problema 1

Il piano tariffario proposto da un operatore telefonico prevede, per le telefonate all'estero, un canone fisso di 10 euro al mese, più 10 centesimi per ogni minuto di conversazione. Indicando con *x* i minuti di conversazione effettuati in un mese, con *f(x)* la spesa totale nel mese e con *g(x)* il costo medio al minuto:

1. individua l'espressione analitica delle funzioni *f(x)* e *g(x)* e rappresentale graficamente; verifica che la funzione *g(x)* non ha massimi né minimi relativi e dai la tua interpretazione dell'andamento delle due funzioni alla luce della situazione concreta che esse rappresentano.

2. Detto x_0 il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, determina x_1 tale che:

$$g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2}$$

Traccia il grafico della funzione che esprime x_1 in funzione di x_0 e discuti il suo andamento. Che significato ha il suo asintoto verticale?
Sul suo sito web l'operatore telefonico ha pubblicato una mappa che rappresenta la copertura del segnale telefonico nella zona di tuo interesse:

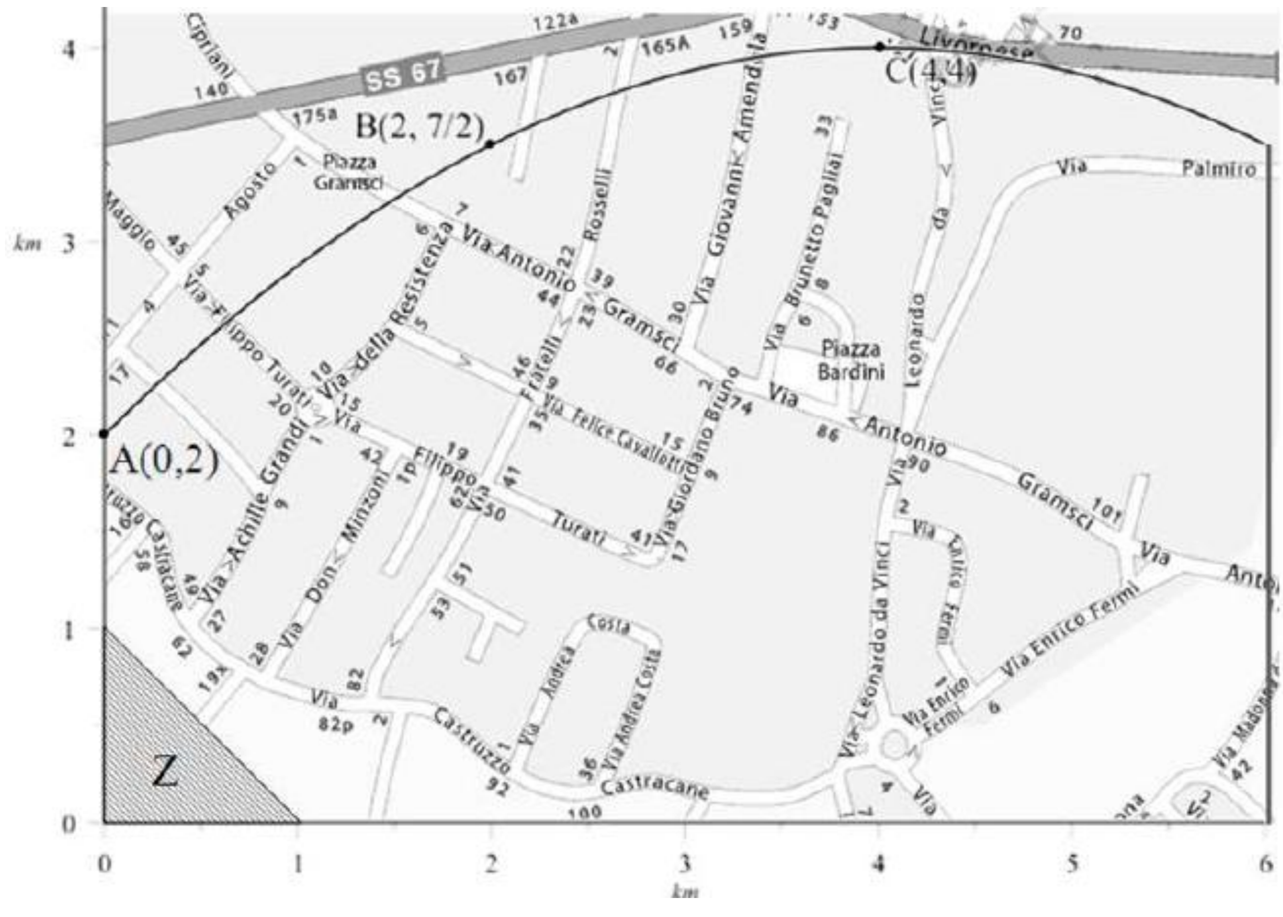

Figura 1

La zona è delimitata dalla curva passante per i punti *A*, *B* e *C*, dagli assi x e y, e dalla retta di equazione $x = 6$; la porzione etichettata con la "Z", rappresenta un'area non coperta dal segnale telefonico dell'operatore in questione.

3. Rappresenta il margine superiore della zona con una funzione polinomiale di secondo grado, verificando che il suo grafico passi per i tre punti *A*, *B* e *C*. Sul sito web dell'operatore compare la

seguente affermazione: "*nella zona rappresentata nella mappa risulta coperto dal segnale il 96% del territorio*"; verifica se effettivamente è così.

L'operatore di telefonia modifica il piano tariffario, inserendo un sovrapprezzo di 10 centesimi per ogni minuto di conversazione successivo ai primi 500 minuti.

4. Determina come cambiano, di conseguenza, le caratteristiche delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, riguardo agli asintoti, alla monotonia, continuità e derivabilità, individua eventuali massimi e minimi assoluti della funzione $g(x)$ e della sua derivata e spiegane il significato nella situazione concreta.

Svolgimento

1 Scriviamo la funzione *f(x)* che rappresenta la spesa totale in un mese:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se\ x < 0 \\ \dfrac{1}{10}x + 10 & se\ x \geq 0 \end{cases}$$

Disegniamo il grafico:

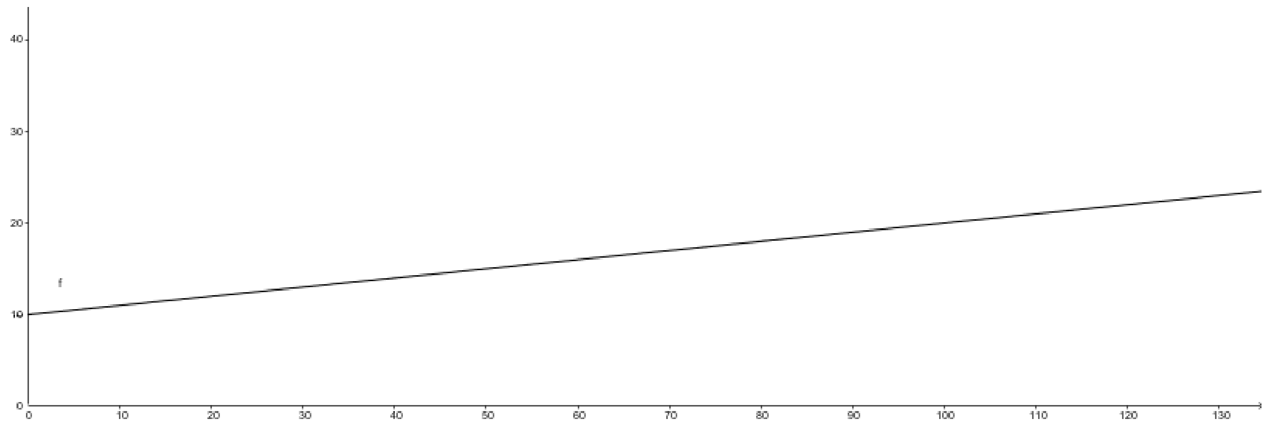

Figura 2 Il grafico di f(x).

La funzione che rappresenta la spesa totale mensile è una semiretta e presenta un andamento crescente all'aumentare dei minuti di conversazione.
La funzione *g(x)* rappresenta il costo medio al minuto quindi:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{10} + \frac{10}{x} = \frac{x+100}{10x}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & se\ x \leq 0 \\ \dfrac{x+100}{10x} & se\ x > 0 \end{cases}$$

Studiamo la funzione *g(x)*:
Campo di esistenza: $x \neq 0$ ma, dato che rappresenta un costo medio al minuto si definisce per $x > 0$.

Segno:

$$\frac{x+100}{10x} \geq 0$$

Il numeratore è positivo per $x > -100$

Il denominatore è positivo per $x > 0$

g(x) è sempre positiva nell'insieme in cui è definita.

Intersezione con gli assi:

Per x>0 *g(x)* non interseca gli assi cartesiani.

Gli asintoti:

Asintoti orizzontali:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+100}{10x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{100}{x}}{10} = \frac{1}{10}$$

La retta $y = \frac{1}{10}$ è asintoto orizzontale.

Asintoti verticali:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x+100}{10x} = +\infty$$

La retta x=0 è asintoto verticale.

Asintoti obliqui:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+100}{x^2} = 0$$

Non esistono asintoti obliqui.

Intersezioni con gli asintoti:

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x+100}{10x} \\ y = \dfrac{1}{10} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{10} = \dfrac{x+100}{10x} \\ y = \dfrac{1}{10} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-x-100}{10x} = 0 \\ y = \dfrac{1}{10} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\dfrac{100}{10x} = 0 \\ y = \dfrac{1}{10} \end{cases}$$

Il sistema non ha soluzione: la funzione non interseca l'asintoto orizzontale.

Crescenza e decrescenza:

Calcoliamo la derivata prima:

$$g'(x) = \frac{10x - 10x - 1000}{100x^2} = -\frac{10}{x^2}$$

La derivata prima è sempre negativa e non si annulla mai quindi la funzione è sempre decrescente e non presenta né massimi né minimi relativi.

Possiamo disegnare il grafico della funzione:

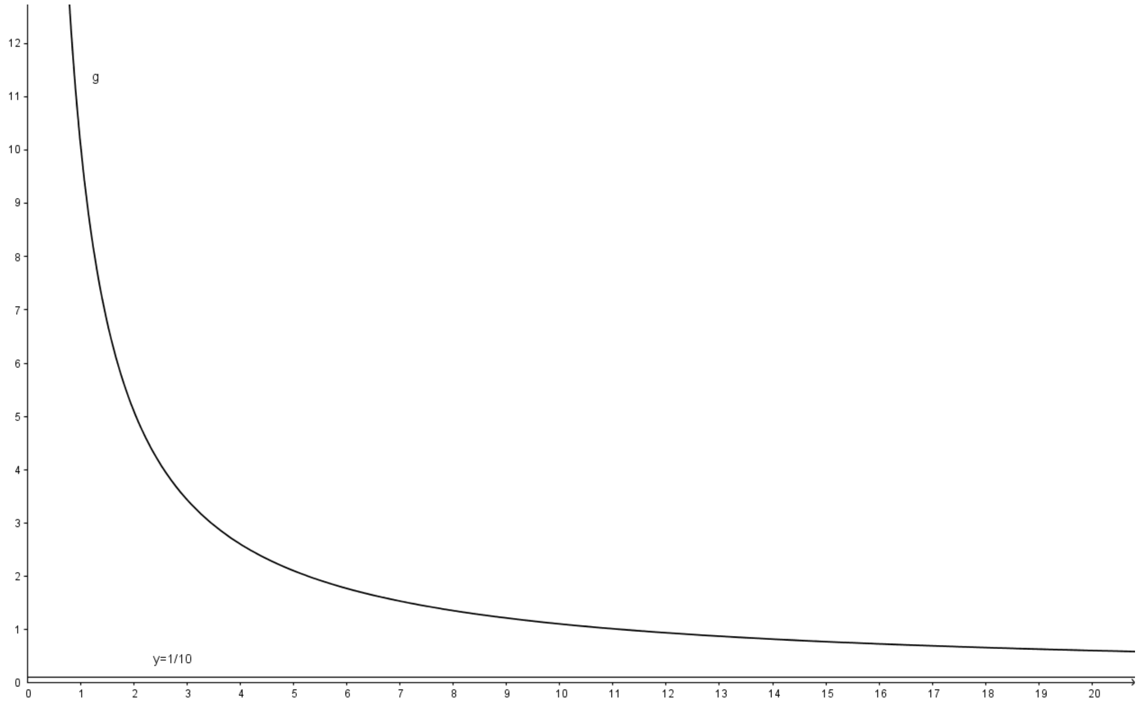

Figura 3 Grafico di g(x).

g(x) rappresenta il costo medio al minuto e decresce al crescere dei minuti di conversazione. Al tendere ad infinito dei minuti di conversazione effettuati il costo medio al minuto tende a 10 centesimi.

2. Scriviamo le espressioni richieste:

$$g(x_1) = \frac{x_1 + 100}{10x_1}$$

$$\frac{g(x_0)}{2} = \frac{x_0 + 100}{20x_0}$$

ed uguagliamole:

$$\frac{x_1 + 100}{10x_1} = \frac{x_0 + 100}{20x_0}$$

$$\frac{2x_0x_1 + 200x_0 - x_0x_1 - 100x_1}{20x_0x_1} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{(x_0 - 100)x_1}{20x_0x_1} = \frac{-200x_0}{20x_0x_1}$$

$$(100 - x_0)x_1 = 200x_0 \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{200x_0}{100 - x_0}$$

Studiamo questa funzione.

Campo di esistenza:

$$x_0 \neq 100$$

Segno:

Il numeratore è positivo per $x_0 > 0$;
Il denominatore è positivo per $x_0 < 100$

La funzione è positiva per $x_0 < 100$.

Intersezione con gli assi:
La funzione interseca gli assi cartesiani nell'origine.

Gli asintoti:
Asintoti orizzontali:

$$\lim_{x_0 \to +\infty} \frac{200x_0}{100 - x_0} = -200$$

Asintoti verticali:

$$\lim_{x_0 \to 100^-} \frac{200x_0}{100 - x_0} = +\infty$$

$$\lim_{x_0 \to 100^+} \frac{200x_0}{100 - x_0} = -\infty$$

$x_0 = 100$ è asintoto verticale.

Asintoti obliqui:

$$m = \lim_{x_0 \to +\infty} \frac{200x_0}{100 - x_0} \frac{1}{x_0} = 0$$

Non esistono asintoti obliqui.

Intersezioni con gli asintoti:

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{200x_0}{100 - x_0} \\ x_1 = -200 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -200 = \dfrac{200x_0}{100 - x_0} \\ x_1 = -200 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{-20000 + 200x_0 - 200x_0}{100 - x_0} = 0 \\ x_1 = 200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{20000}{100 - x_0} = 0 \\ x_1 = 200 \end{cases}$$

Il sistema non ha soluzione: la funzione non interseca l'asintoto orizzontale.

Crescenza e decrescenza:

Calcoliamo la derivata prima:

$$x_1' = \frac{200(100 - x_0) + 200x_0}{(100 - x_0)^2} = \frac{20000}{(100 - x_0)^2}$$

La derivata prima è sempre positiva quindi la funzione è sempre crescente e non presenta né massimi né minimi relativi.

Disegniamo il grafico:

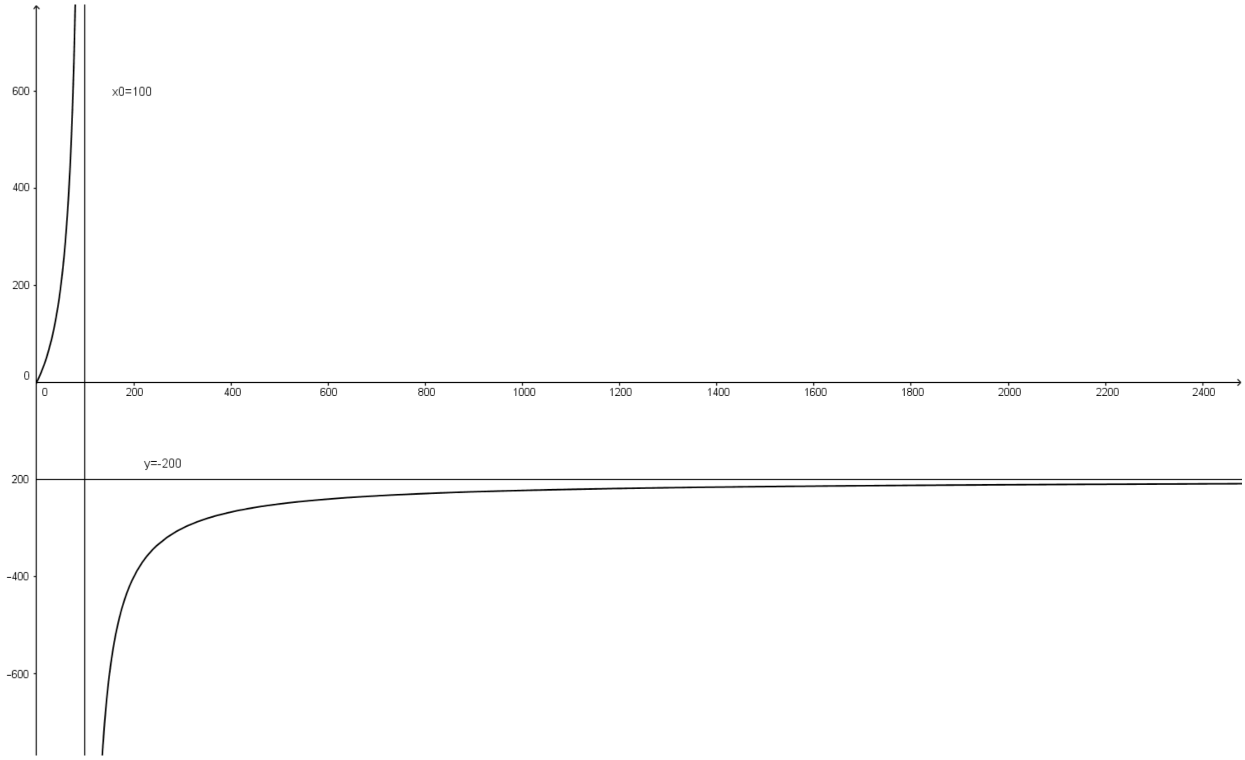

Figura 4 Il grafico di x_1

x_1 presenta un asintoto verticale per x_0=100 quindi se i minuti di conversazione effettuati in un mese raggiungono questo valore il costo medio al minuto risulta dimezzato.

3. Rappresentiamo il margine superiore di copertura con una parabola (funzione polinomiale di secondo grado). Scriviamo l'equazione di una parabola generica:

$$y = ax^2 + bx + c$$

e imponiamo il passaggio per i tre punti dati risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2 = c & passaggio\ per\ A(0.2) \\ \frac{7}{2} = 4a + 2b + c & passaggio\ per\ B\left(2, \frac{7}{2}\right) \\ 4 = 16a + 4b + c & passaggio\ per\ C(4,4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 2 \\ 4a + 2b = \frac{7}{2} - 2 \\ 16a + 4b = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ 4a + 2b = \frac{3}{2} \\ b = \frac{2 - 16a}{4} = \frac{1 - 8a}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ 4a + 2\frac{1 - 8a}{2} = \frac{3}{2} \\ b = \frac{1 - 8a}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 2 \\ 4a + 1 - 8a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{1 - 8a}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ -4a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1 - 8a}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ a = -\frac{1}{8} \\ b = 1 \end{cases}$$

Scriviamo l'equazione della parabola:

$$y = -\frac{1}{8}x^2 + x + 2$$

Per calcolare la percentuale di copertura del territorio dobbiamo trovare le aree delle due zone coperta e non coperta. Per prima cosa calcoliamo l'area di tutta la zona rappresentata in figura:

$$A_{TOTALE} = \int_0^6 \left(-\frac{1}{8}x^2 + x + 2\right) dx = -\frac{1}{8}\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \Bigg|_0^6 =$$

$$= -\frac{1}{8}\frac{216}{3} + \frac{36}{2} + 12 = -9 + 18 + 12 = 21$$

Adesso troviamo l'area della zona non coperta (area di un triangolo rettangolo isoscele con cateti di misura 1):

$$A_{NON\ COPERTA} = \frac{1}{2}$$

Quindi:

$$A_{COPERTA} = A_{TOTALE} - A_{NON\ COPERTA} = 21 - \frac{1}{2} = \frac{41}{2}$$

La percentuale di copertura vale:

$$\frac{A_{COPERTA}}{A_{TOTALE}} = \frac{\frac{41}{2}}{21} = 0.976 = 97.6\%$$

Il dato pubblicato sul sito è errato.

4. Riscriviamo *f(x)* dopo l'applicazione delle nuove tariffe. Per $0 \le x \le 500$ *f(x)* rimane come prima mentre per $x > 500$ diventa:

$$f(x) = \frac{2}{10}x + k \qquad f(x) = \frac{1}{5}x + k$$

troviamo *k* tale che:

$$f(500) = \frac{1}{10}500 + 10 = 50 + 10 = 60$$

quindi per $x > 500$ deve essere:

$$f(500) = \frac{1}{5}500 + k = 60 \quad \rightarrow \quad 100 + k = 60 \quad \rightarrow \quad k = -40$$

ma allora:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se\ x < 0 \\ \frac{1}{10}x + 10 & se\ 0 \le x \le 500 \\ \frac{1}{5}x - 40 & se\ x > 500 \end{cases}$$

Disegniamo il grafico della funzione.

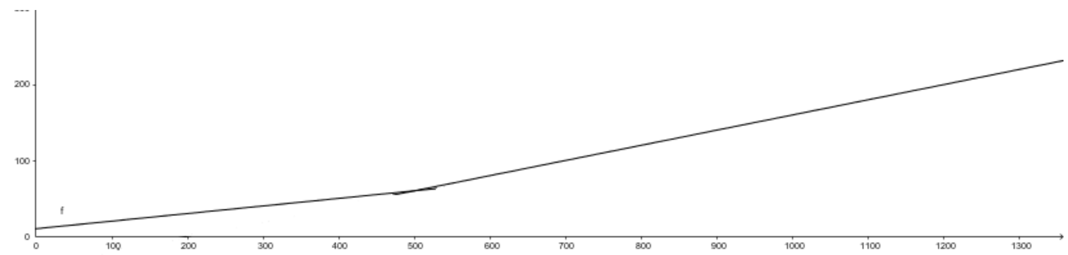

Figura 5 Grafico di f(x) con le nuove tariffe.

f(x) è sempre crescente, è continua ma non è derivabile per *x=500* infatti le derivate destra e sinistra esistono ma non sono uguali.

$$f'_-(500) = \frac{1}{10} \qquad f'_+(500) = \frac{1}{5}$$

Analizziamo adesso il costo medio al minuto. Con l'applicazione delle nuove tariffe si trova:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & se\ x < 0 \\ \dfrac{x+100}{10x} & se\ 0 \le x \le 500 \\ \dfrac{x-200}{5x} & se\ x > 500 \end{cases}$$

Abbiamo già studiato la funzione nell'intervallo $0 \le x \le 500$ ci resta solo da vedere la continuità per $x = 500$. Calcoliamo i limiti destro e sinistro:

$$\lim_{x\to 500^-} g(x) = \lim_{x\to 500^-} \frac{x+100}{10x} = \frac{600}{5000} = \frac{3}{25}$$

$$\lim_{x\to 500^+} g(x) = \frac{x-200}{5x} = \frac{300}{2500} = \frac{3}{25}$$

g(x) risulta continua infatti i limiti calcolati sono uguali.

Segno:

g(x) è positiva per *x>500.*

Gli asintoti:

Asintoti orizzontali:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x-200}{5x} = \frac{1}{5}$$

La retta di equazione $y = \frac{1}{5}$ è asintoto orizzontale.

Nell'intervallo considerato non sono presenti asintoti verticali.

Intersezioni con gli asintoti:

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x-200}{5x} \\ y = \dfrac{1}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{5} = \dfrac{x-200}{5x} \\ y = \dfrac{1}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-x+200}{5x} = 0 \\ y = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{200}{5x} = 0 \\ y = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Il sistema non ha soluzione: la funzione non interseca l'asintoto orizzontale.

Crescenza e decrescenza:

Calcoliamo la derivata prima nell'intervallo considerato:

$$g'(x) = \frac{5x - 5x + 1000}{25x^2} = \frac{40}{x^2}$$

La derivata prima è sempre positiva e non si annulla mai quindi la funzione è sempre crescente. Vediamo se è derivabile per *x=500*.

$$g'_-(500) = -\frac{10}{250000} = -\frac{1}{25000}$$

$$g'_+(500) = \frac{40}{250000} = \frac{1}{6250}$$

Le derivate destra e sinistra in *x=500* sono diverse quindi la funzione non è derivabile in questo punto.
Per *x<500* la derivata prima è negativa e la funzione è decrescente. Per x>500 la derivata prima è positiva e la funzione è crescente. In *x=500 g(x)* presenta un minimo assoluto.
Per 500 minuti di conversazione il costo medio è minimo e vale:

$$g(500) = \frac{3}{25} = 0.12 \quad \rightarrow \quad 12cent.$$

Al crescere dei minuti di conversazione il costo medio al minuto tende a 20cent.

Grafico di *g(x)*:

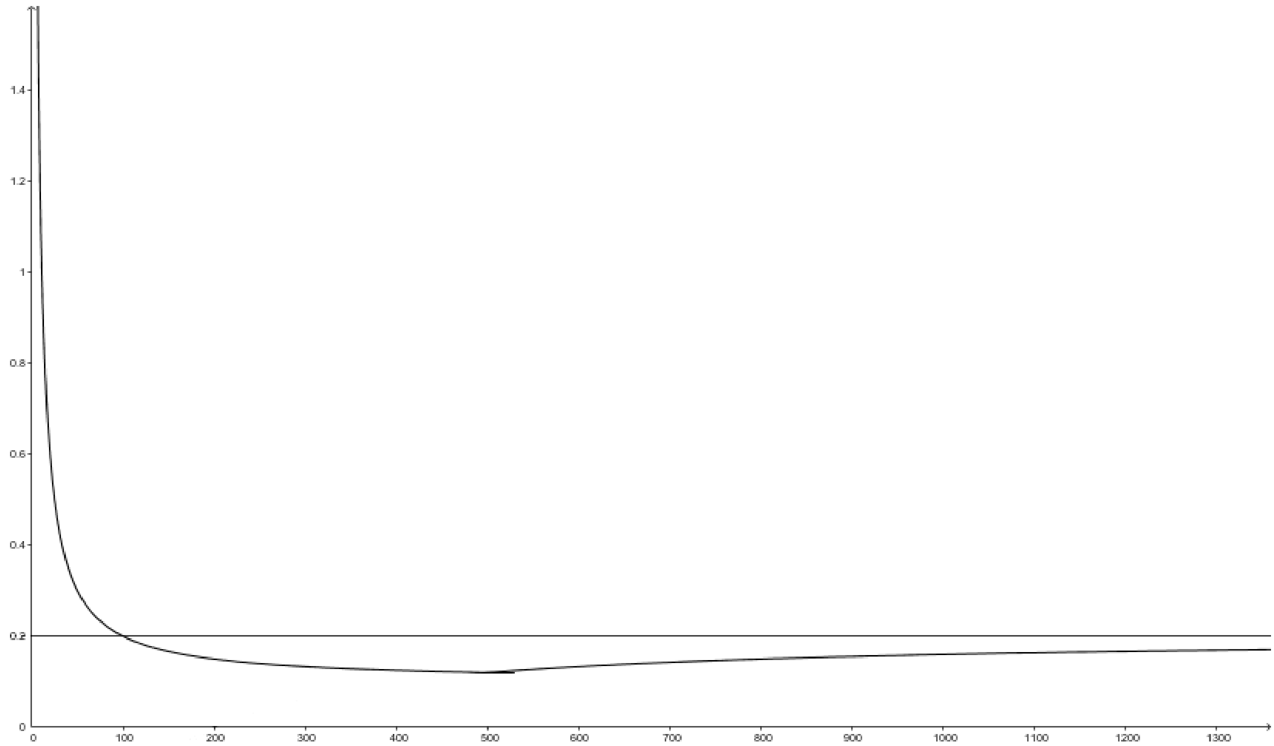

Figura 6 Grafico di g(x) con le nuove tariffe.

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales