Problema 2

La funzione derivabile $y = f(x)$ ha per $x \in [-3, 3]$ il grafico Γ disegnato in figura 1. Γ presenta tangenti orizzontali per $x = -1$, $x = 1$, x = 2. Le aree delle regioni *A*, *B*, *C* e *D* sono rispettivamente 2, 3, 3 e 1. Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$ tale che $g(3) = -5$.

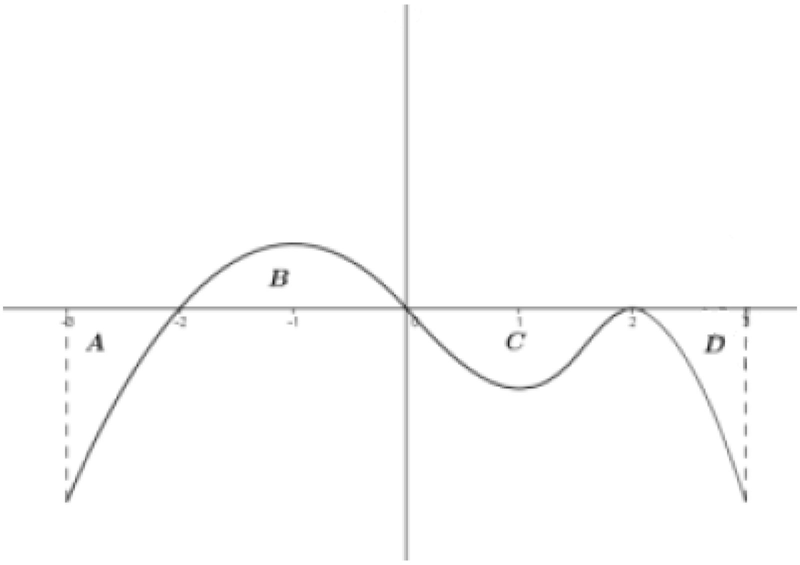

Figura 1

1. Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.

2. Individua i valori di $x \in [-3, 3]$, per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di *x* per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.

3. Calcola $g(0)$ e, se esiste, il

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + g(x)}{2x}$$

4. Sia $h(x) = 3 \cdot f(2x + 1)$, determina il valore di

$$\int_{-2}^{1} h(x) dx$$

Svolgimento

1 Dal grafico si vede che *f(x)* si annulla nei punti

$$x = -2, \qquad x = 0, \qquad x = 2$$

In x = 2 l'asse delle ascisse è tangente quindi il punto è almeno doppio. Il grado minimo del polinomio, quindi, è 4.

2. Dato che *g(x)* è una primitiva di *f(x)* si ha:

$$g'(x) = f(x)$$

I possibili punti di massimo e di minimo di *g(x)* sono quelli in cui si annulla la sua derivata prima cioè *f(x)*. Guardando il grafico si vede che tali punti sono $x = -2, x = 0$ *e* $x = 2$. I punti di massimo relativo sono quelli in cui la funzione è concava quindi quelli per cui la sua derivata seconda è negativa. Ma

$$g''(x) = f'(x)$$

Quindi dobbiamo vedere per quali di questi punti $f'(x)$ è negativa.
La derivata prima di una funzione è negativa quando la funzione è decrescente. Dal grafico si vede che f(x) è decrescente solo per x=0.
Ma allora x=0 è un punto di massimo relativo di *g(x)*.
g(x) volge la concavità verso l'alto quando la sua derivata seconda è positiva cioè quando *f(x)* è crescente. Dal grafico di figura si vede che *f(x)* è crescente per $-3 < x < -1$ e per $1 < x < 2$. In questi intervalli g(x) volge la concavità verso l'alto.

3. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale e sapendo che *g(x)* è una primitiva di *f(x)* possiamo scrivere:

$$g(3) - g(x) = \int_x^3 f(x)dx \quad \rightarrow \quad g(x) = g(3) - \int_x^3 f(x)dx$$

sappiamo che $g(3) = -5$ quindi:

$$g(x) = -5 - \int_x^3 f(x)dx$$

per x=0 si trova:

$$g(0) = -5 - \int_0^3 f(x)dx$$

ma:

$$\int_0^3 f(x)dx = AREA_C + AREA_D = -3 - 1 = -4$$

quindi:

$$g(0) = -5 - (-4) = -1$$

g(x) è continua per x=0 infatti dal grafico di *f(x)* si vede che è derivabile con derivata prima continua nel punto in questione. Ma allora:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + g(x)}{2x} = \frac{1 + g(0)}{0} = \frac{0}{0}$$

è una forma indeterminata. Applichiamo il teorema di de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + g(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{g'(x)}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{2} = \frac{f(0)}{2} = 0$$

4. Possiamo scrivere:

$$\int_{-2}^1 h(x)dx = 3 \int_{-2}^1 f(2x + 1)dx$$

Integriamo per sostituzione ponendo:

$$2x + 1 = t \quad \rightarrow \quad 2dx = dt \quad \rightarrow \quad dx = \frac{dt}{2}$$

troviamo gli estremi di integrazione:

$$se\ x = -2 \quad t = -3 \qquad se\ x = 1 \quad t = 3$$

integriamo:

$$3 \int_{-2}^{1} f(2x + 1)dx = \frac{3}{2} \int_{-3}^{3} f(t)\, dt =$$

$$= \frac{3}{2}(AREA_A + AREA_B + AREA_C + AREA_D) = \frac{3}{2}(-2 + 3 - 3 - 1) = \frac{3}{2}(-3) = -\frac{9}{2}$$

In conclusione:

$$\int_{-2}^{1} h(x)dx = -\frac{9}{2}$$

Matilde Consales