Quesito 2

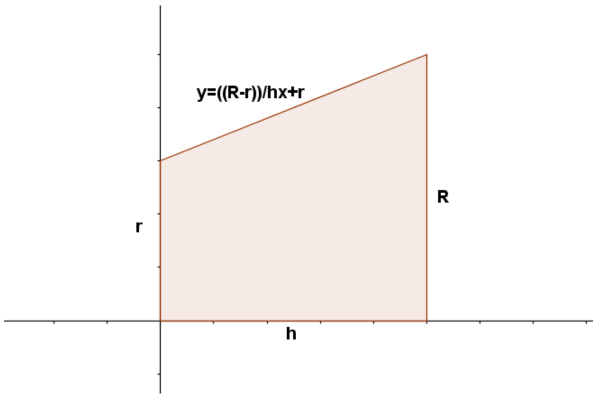
Dimostrare che il volume del tronco di cono è espresso dalla formula:

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$$

Dove R e r sono i raggi e h è l'altezza.

Svolgimento

Il tronco di cono si ottiene dalla rotazione intorno all'asse delle ascisse del trapezio di figura.



Troviamo l'equazione della retta sostegno del lato obliquo. Scriviamo l'equazione di una retta generica:

$$y = mx + q$$

Imponiamo il passaggio per i punti (0, r) e (h, R). Otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} r = q \\ R = mh + q \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q = r \\ mh = R - r \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q = r \\ m = \dfrac{R-r}{h} \end{cases}$$

Quindi:

$$y = \frac{R-r}{h}x + r$$

Il volume è dato dalla relazione:

$$V = \int_0^h \pi\left(\frac{R-r}{h}x + r\right)^2 dx =$$

$$= \pi\int_0^h \left[\frac{(R-r)^2}{h^2}x^2 + 2\frac{(R-r)}{h}rx + r^2\right] dx =$$

$$= \pi\left[\frac{(R-r)^2}{h^2}\frac{x^3}{3} + 2\frac{(R-r)r}{h}\frac{x^2}{2} + r^2x\right]\Big|_0^h =$$

$$= \pi \left[\frac{(R-r)^2}{h^2} \frac{h^3}{3} + \frac{(R-r)r}{h} h^2 + r^2 h \right] =$$

$$= \pi \left[\frac{(R-r)^2}{3} h + (R-r)rh + r^2 h \right] = \frac{\pi}{3} h (R^2 - 2Rr + r^2 + 3Rr - 3r^2 + 3r^2) =$$

$$= \frac{\pi}{3} h (R^2 + Rr + r^2)$$

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales