Quesito 4

Di quale delle seguenti equazioni differenziali la funzione $y = \frac{\ln x}{x}$ è soluzione?

$$y'' + 2\frac{y'}{x} = y$$

$$y' + xy'' = 1$$

$$xy' = \frac{1}{x} + y$$

$$x^2y'' + xy' + \frac{2}{x} = y$$

Svolgimento

Determiniamo la derivata prima e la derivata seconda della funzione data:

$$y' = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$y'' = \frac{-\frac{1}{x}x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{-1 - 2 + 2\ln x}{x^3} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

Sostituendo nella prima equazione:

$$\frac{2\ln x - 3}{x^3} + 2\frac{1}{x}\frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{2\ln x - 3 + 2 - 2\ln x}{x^3} = -\frac{1}{x^3} \neq y$$

Consideriamo la seconda equazione:

$$\frac{1 - \ln x}{x^2} + x\frac{2\ln x - 3}{x^3} = \frac{1 - \ln x + 2\ln x - 3}{x^2} = \frac{\ln x - 2}{x^2} \neq 1$$

Consideriamo il primo membro della terza equazione:

$$x\frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x}$$

Sostituiamo nel secondo membro della terza equazione:

$$\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = \frac{1 + \ln x}{x}$$

y non è soluzione della terza equazione. Proviamo con la quarta:

$$x^2\frac{2\ln x - 3}{x^3} + x\frac{1 - \ln x}{x^2} + \frac{2}{x} = \frac{2\ln x - 3 + 1 - \ln x + 2}{x} = \frac{\ln x}{x} = y$$

La funzione data è soluzione della quarta equazione differenziale.

Matilde Consales