

Quesito 7

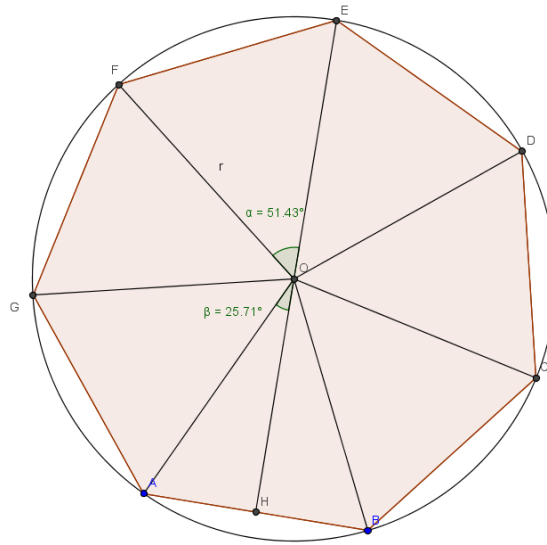
Detta $A(n)$ l'area del poligono regolare di n lati inscritto in un cerchio C di raggio r , verificare che

$$A(n) = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n}$$

e calcolarne il limite per $n \rightarrow +\infty$.

Svolgimento

Consideriamo un poligono regolare inscritto in un cerchio di raggio r . Per fissare le idee consideriamo l'ettagono di figura.



Se dal centro del cerchio tracciamo i raggi passanti per i sette vertici otteniamo sette triangoli isosceli formati dal lato dell'ettagono e da due raggi ciascuno.

L'angolo di ciascun triangolo isoscele che si oppone al lato del poligono vale:

$$\frac{2\pi}{n}$$

dove n è il numero di lati del poligono.

Troviamo l'area di un triangolo. Dalla trigonometria sappiamo che l'altezza del triangolo è data da:

$$h = r \cos \frac{2\pi}{2n} = r \cos \frac{\pi}{n}$$

mentre la base, uguale al lato del poligono inscritto, vale:

$$l = 2r \sin \frac{2\pi}{2n} = 2r \sin \frac{\pi}{n}$$

l'area di un triangolo, allora, è data da:

$$A_T = \frac{1}{2} hl = \frac{1}{2} r \cos \frac{\pi}{n} 2r \sin \frac{\pi}{n} = \frac{1}{2} r^2 \left(2 \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n} \right)$$

ma:

$$2 \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n} = \sin \frac{2\pi}{n} \quad 1$$

¹ Infatti $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$

quindi:

$$A_T = \frac{1}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n}$$

Il poligono è composto da n triangoli tutti uguali perché è regolare. Ma allora possiamo scrivere l'area del poligono:

$$A_P = nA_T = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n}$$

Calcoliamo adesso il limite richiesto:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n} =$$

Moltiplichiamo e dividiamo per $\frac{2\pi}{n}$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2\pi n}{n} \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi r^2 \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} =$$

Ricordando che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Si trova:

$$= \pi r^2$$

Quindi l'area del poligono inscritto si avvicina all'area del cerchio quando il numero di lati aumenta.

D'altra parte quando il numero di lati è infinito il poligono diventa un cerchio.

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales