Quesito 9

Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & se\ 0 \le x \le 1 \\ x^2 - kx + k & se\ 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Determinare il parametro k in modo che nell'intervallo [0, 2] sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi assicura l'esistenza.

Svolgimento

Scriviamo il teorema di Lagrange:
Sia $f: [a, b] \ \rightarrow$ R continua in [a, b] e derivabile in (a, b).
Allora esiste almeno un punto x_0 tale che:

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$$

Affinché sia applicabile il teorema *f(x)* deve essere continua nell'intervallo [0, 2] e derivabile nell'intervallo (0, 2).
La funzione è sicuramente continua per $x \neq 1$. Vediamo se lo è anche per x=1. Una funzione si dice continua in un punto se esistono finiti i limiti destro e sinistro in quel punto e sono coincidenti.
Troviamo i limiti destro e sinistro per x=1:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} x^3 = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} x^2 - kx + k = 1$$

La funzione è continua nell'intervallo [0, 2] $\forall\, k \in R$.
Vediamo ora se esiste k tale che *f(x)* sia derivabile nell'intervallo (0, 2). Il punto critico è x=1. La funzione è derivabile per x=1 se esistono finiti i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale in x=1 e se i limiti sono coincidenti.
Calcoliamoli:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(1+h)^3 - 1^3}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} 3 + 3h + h^2 = 3$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(1+h)^2 - k(1+h) + k - (1^2 - k \cdot 1 + k)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{1 + 2h + h^2 - k - kh + k - 1 + k - k}{h} = \lim_{h \to 0^+} 2 + h - k = 2 - k$$

I due limiti coincidono se:

$$3 = 2 - k \quad \rightarrow \quad k = -1$$

Alla funzione data è applicabile il teorema di Lagrange se $k = -1$.
Quindi:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & se\ 0 \le x \le 1 \\ x^2 + x - 1 & se\ 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Determiniamo ora il punto x_0 di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza. Si ha:

$$\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)} = f'(x_0)$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)} = \frac{f(2)-f(0)}{(2-0)} = \frac{4+2-1-0}{2} = \frac{5}{2}$$

Consideriamo l'intervallo (0, 1):

$$f'(x_0) = 3x_0^2 = \frac{5}{2} \quad \rightarrow \quad x_0^2 = \frac{5}{6} \quad \rightarrow \quad x_0 = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}$$

In (0, 1) esiste il punto $x_0 = \sqrt{\frac{5}{6}}$

Consideriamo l'intervallo (1, 2):

$$f'(x_0) = 2x_0 + 1 = \frac{5}{2} \quad \rightarrow \quad x_0 = \frac{3}{4}$$

Il punto trovato non appartiene all'intervallo considerato.
Esiste solo un punto che soddisfa il teorema di Lagrange:

$$x_0 = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

Matilde Consales