Problema 1

L'amministratore di un piccolo condominio deve installare un nuovo serbatoio per il gasolio da riscaldamento. Non essendo soddisfatto dei modelli esistenti in commercio, ti incarica di progettarne uno che risponda alle esigenze del condominio.

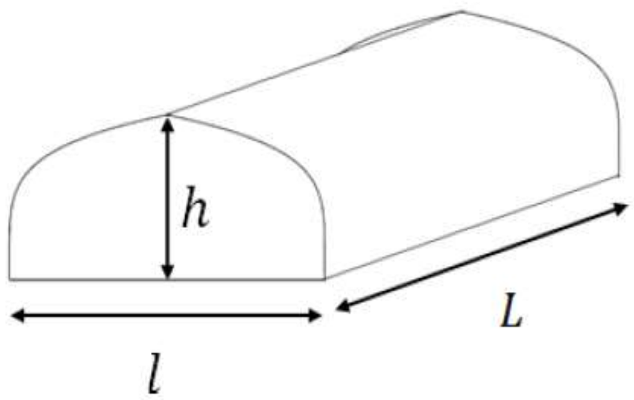

Figura 1

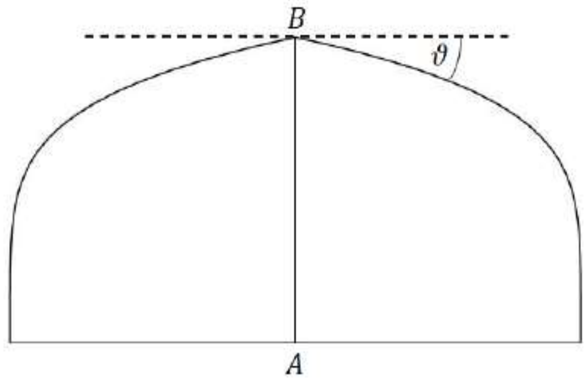

Figura 2

Allo scopo di darti le necessarie informazioni, l'amministratore ti fornisce il disegno in figura 1, aggiungendo le seguenti indicazioni:

- la lunghezza L del serbatoio deve essere pari a otto metri;
- la larghezza l del serbatoio deve essere pari a due metri;
- l'altezza h del serbatoio deve essere pari a un metro;
- il profilo laterale (figura 2) deve avere un punto angoloso alla sommità, per evitare l'accumulo di ghiaccio durante i mesi invernali, con un angolo $\vartheta \geq 10°$;
- la capacità del serbatoio deve essere pari ad almeno 13m^3, in modo da garantire al condominio il riscaldamento per tutto l'inverno effettuando solo due rifornimenti di gasolio;
- al centro della parete laterale del serbatoio, lungo l'asse di simmetria (segmento AB in figura 2) deve essere installato un indicatore graduato che riporti la percentuale di riempimento V del volume del serbatoio in corrispondenza del livello z raggiunto in altezza dal gasolio.

1. Considerando come origine degli assi cartesiani il punto A in figura 2, individua tra le seguenti famiglie di funzioni quella che meglio può descrivere il profilo laterale del serbatoio per $x \in [-1,1]$, k intero positivo, motivando opportunamente la tua scelta:

$$f_1(x) = (1 - |x|)^{\frac{1}{k}}$$

$$f_2(x) = -6|x|^3 + 9kx^2 - 4|x| + 1$$

$$f_3(x) = cos\left(\frac{\pi}{2}x^k\right)$$

2. Determina il valore di k che consente di soddisfare i requisiti richiesti relativamente all'angolo ϑ e al volume del serbatoio.

3. Al fine di realizzare l'indicatore graduato, determina l'espressione della funzione $V(z)$ che associa al livello z del gasolio (in metri) la percentuale di riempimento V del volume da riportare sull'indicatore stesso.

Quando consegni il tuo progetto, l'amministratore obietta che essendo il serbatoio alto un metro, il valore z del livello di gasolio, espresso in centimetri, deve corrispondere alla percentuale di riempimento: cioè, ad esempio, se il gasolio raggiunge un livello z pari a 50 cm vuol dire che il serbatoio è pieno al 50%; invece il tuo indicatore riporta, in corrispondenza del livello 50 cm, una percentuale di riempimento 59,7%.

4. Illustra gli argomenti che puoi usare per spiegare all'amministratore che il suo ragionamento è sbagliato; mostra anche qual è, in termini assoluti, il massimo errore che si commette usando il livello z come indicatore della percentuale di riempimento, come da lui suggerito, e qual è il valore di z in corrispondenza del quale esso si verifica.

Svolgimento

Domanda 1: facciamo alcune osservazioni.

A. Dato che la larghezza del serbatoio deve essere di 2m deve essere:
$$f(-1) = f(1) = 0$$
B. Dato che l'altezza deve essere 1m deve essere:
$$f(0) = 1$$
C. Dalla figura si vede che la funzione deve essere crescente per *x<0* e decrescente per *x>0*.
D. Dato che il serbatoio deve avere un punto angoloso per *x=0* la funzione che ne descrive il profilo non deve essere derivabile in questo punto .

Tutte e tre le funzioni proposte soddisfano i primi due punti, infatti:

$$f_1(-1) = f_1(1) = 0 \qquad e \qquad f_1(0) = 1$$

$$f_2(-1) = f_2(1) = 0 \qquad e \qquad f_2(0) = 1$$

$$f_3(-1) = f_3(1) = 0 \qquad e \qquad f_3(0) = 1$$

Controlliamo la crescenza e la decrescenza studiando la derivata prima.

$$f_1' = \begin{cases} \frac{1}{k}(1+x)^{\frac{1}{k}-1} & per -1 < x < 0 \\ \\ -\frac{1}{k}(1-x)^{\frac{1}{k}-1} & per \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

Si vede che nel primo tratto la derivata prima è sempre positiva e, quindi, la funzione è crescente e nel secondo tratto è sempre negativa e la funzione è decrescente come richiesto.

$$f_2' = \begin{cases} 18x^2 + 18kx + 4 & per -1 < x < 0 \\ \\ -18x^2 + 18kx - 4 & per \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

Consideriamo il primo tratto. Vediamo quando la derivata prima è positiva:

$$x_{1-2} = \frac{9k \pm \sqrt{81k^2 - 18 \cdot 4}}{18} = \frac{9k \pm \sqrt{81k^2 - 72}}{18}$$

Dato che k è un intero positivo le due soluzioni sono sempre reali e distinte quindi la funzione sarà crescente per

$$x < \frac{9k - \sqrt{81k^2 - 72}}{18}; \quad x > \frac{9k + \sqrt{81k^2 - 72}}{18}$$

E decrescente per

$$\frac{9k - \sqrt{81k^2 - 72}}{18} < x < \frac{9k + \sqrt{81k^2 - 72}}{18}$$

A noi, però, interessa l'intervallo $-1 < x < 0$. Vediamo se per qualche valore di k la funzione è sempre crescente in questo intervallo. Per capire meglio facciamo un grafico dove:

$$P_1 = \frac{9k - \sqrt{81k^2 - 72}}{18} \quad e \quad P_2 = \frac{9k + \sqrt{81k^2 - 72}}{18}$$

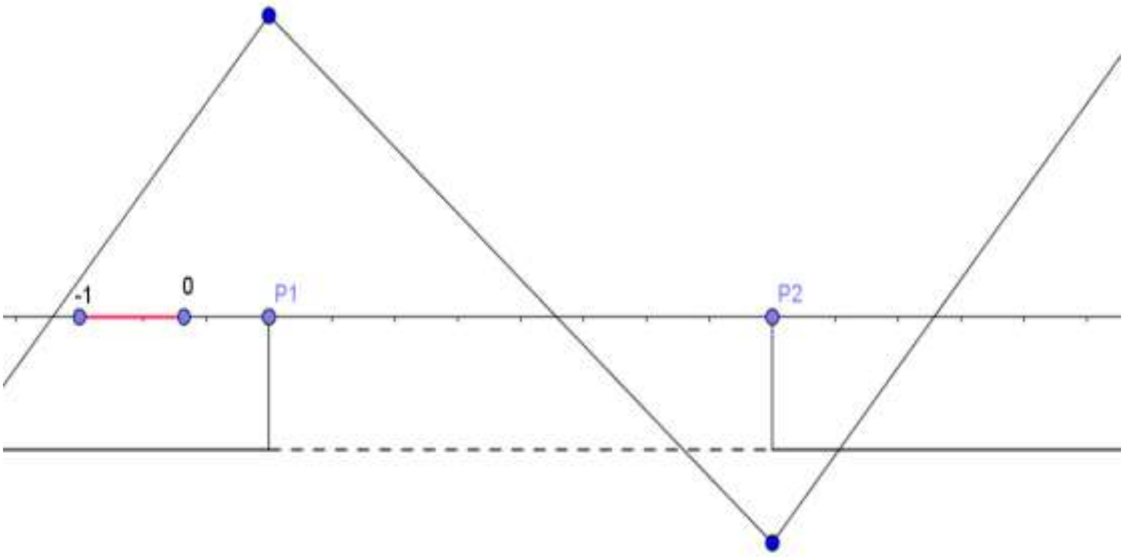

Figura 3

Dalla figura 3 vediamo che la funzione proposta andrebbe bene se fosse:

$$\frac{9k - \sqrt{81k^2 - 72}}{18} > 0$$

Risolviamo questa disequazione.

$$9k - \sqrt{81k^2 - 72} > 0 \quad \rightarrow \quad -\sqrt{81k^2 - 72} > -9k$$

Eleviamo ambo i membri al quadrato:

$$81k^2 - 72 > 81k^2 \quad \rightarrow \quad -72 > 0$$

La disequazione è mai verificata.
Possiamo vedere le cose anche graficamente osservando che la derivata prima in questo intervallo rappresenta una famiglia di parabole. Disegniamole:

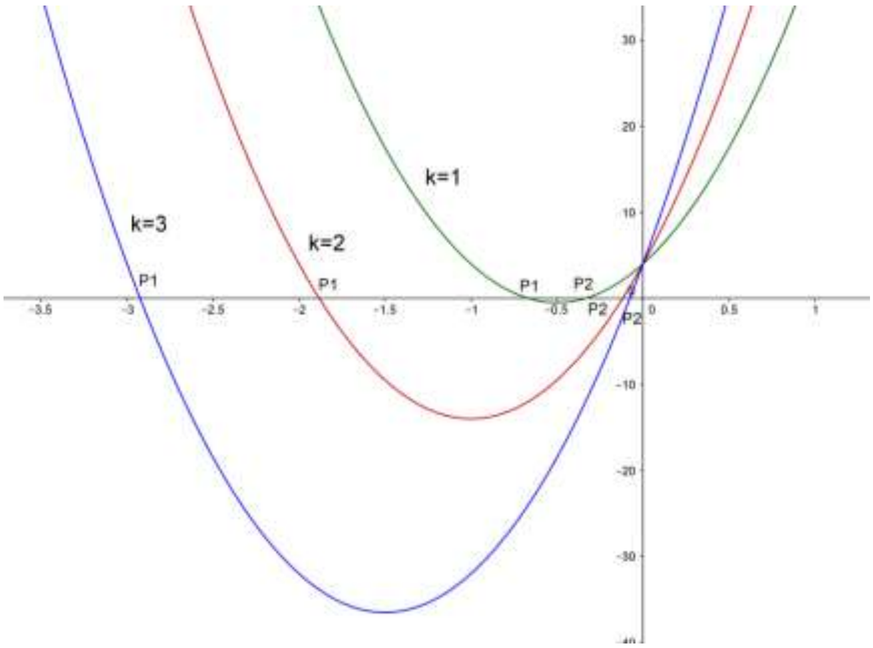

Figura 4 La famiglia di parabole nell'intervallo [-1, 0]

Dal grafico appare evidente che la derivata prima cambia segno nell'intervallo [-1,0] quindi la funzione $f_2(x)$ non si mantiene monotona crescente come richiesto. Se aumentassimo il valore di k otterremmo parabole con il vertice spostato sempre più verso il basso.
Già adesso sappiamo che questa funzione è da scartare. Tuttavia, per esercizio, vediamo cosa succede nell'intervallo [0,1]. Questa volta:

$$f_2'(x) = -18x^2 + 18kx - 4$$

Anche in questo caso abbiamo una famiglia di parabole. Facciamo i grafici:

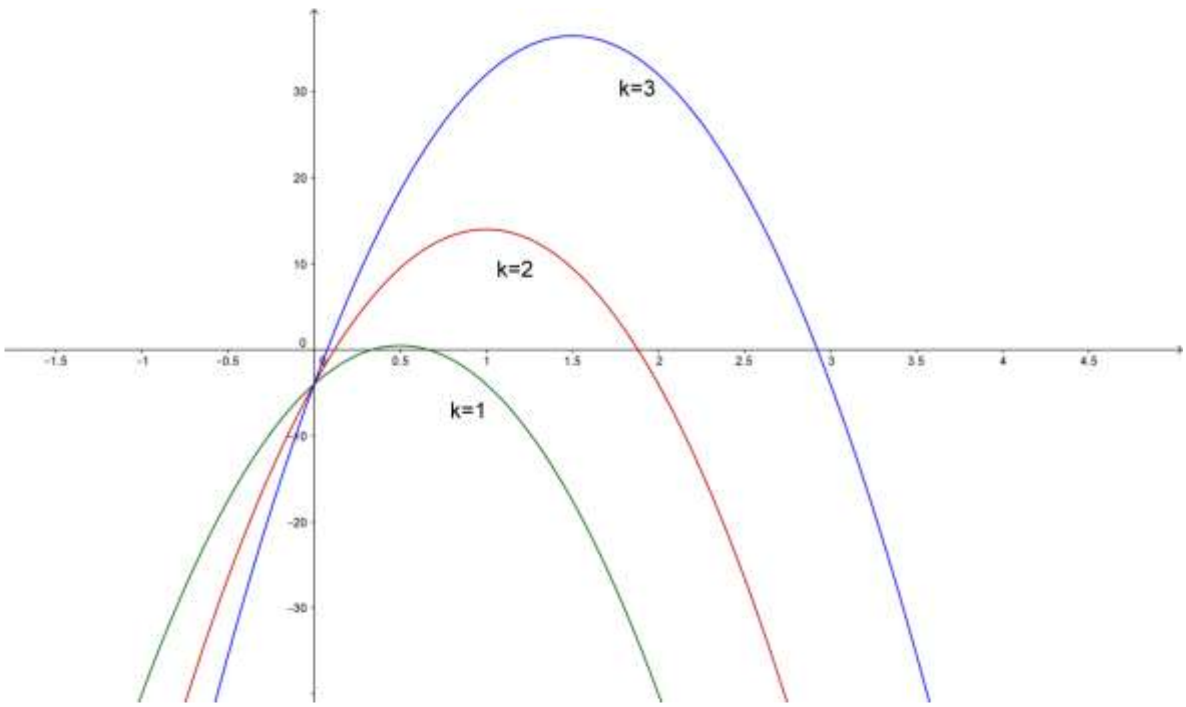

Figura 5 La famiglia di parabole nell'intervallo [0,1]

Dal grafico si evince che la derivata prima cambia segno nell'intervallo [0,1] quindi la funzione $f_2(x)$ non si mantiene monotona decrescente come richiesto. Se aumentassimo il valore di k otterremmo parabole con il vertice spostato sempre più verso l'alto.

Consideriamo adesso l'ultima funzione proposta e scriviamo la derivata prima:

$$f_3'(x) = -\frac{k\pi}{2}x^{k-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}x^k\right)$$

Studiamo il segno ricordando che k è un intero positivo.
Consideriamo il primo intervallo: $x \in [-1,0]$

$$-\frac{k\pi}{2}x^{k-1} > 0 \quad \rightarrow \quad x^{k-1} < 0$$

La disequazione è verificata per *k-1* dispari quindi per *k pari*.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}x^k\right) > 0 \quad se\ k\ pari$$

Quindi

- se k è pari i due fattori sono entrambi positivi, la derivata prima è positiva e la funzione è crescente;
- se k è dispari i due fattori sono entrambi negativi, anche in questo caso la derivata prima è positiva.

Nell'intervallo [-1.0] la funzione è crescente.

Consideriamo il secondo intervallo: $x \in [0,1]$

$$-\frac{k\pi}{2}x^{k-1} > 0 \quad \rightarrow \quad x^{k-1} < 0 \quad mai$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}x^k\right) > 0 \ sempre$$

In questo caso il primo fattore è sempre negativo ed il secondo è sempre positivo. La derivata prima è negativa e la funzione è decrescente.
Questa funzione soddisfa il requisito C.

Controlliamo adesso la derivabilità nel punto $x_0=0$.
Ricordiamo che una funzione è derivabile in un punto x_0 se esistono finiti e sono uguali il limite destro e sinistro del rapporto incrementale, cioè se:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Consideriamo la funzione:

$$f_1(x) = (1-|x|)^{\frac{1}{k}}$$

e calcoliamo i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale.

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+x_0+h)^{\frac{1}{k}}-(1+x_0)^{\frac{1}{k}}}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)^{\frac{1}{k}}-1}{h} =$$

È una forma indeterminata. Applichiamo la regola di de l'Hospital:

$$= \lim_{h\to 0^-}\frac{\frac{1}{k}(1+h)^{\frac{1}{k}-1}}{1} = \frac{1}{k}$$

Questo limite esiste finito.

Calcoliamo ora il limite destro:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{(1-x_0-h)^{\frac{1}{k}}-(1-x_0)^{\frac{1}{k}}}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(1-h)^{\frac{1}{k}}-1}{h}=$$

È una forma indeterminata. Applichiamo la regola di de l'Hospital:

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{-\frac{1}{k}(1-h)^{\frac{1}{k}-1}}{1}=-\frac{1}{k}$$

Anche questo limite esiste finito ma, dato che il limite destro e sinistro non sono uguali la funzione non è derivabile in $x=0$. Inoltre, poiché i due limiti sono finiti in $x=0$ si ha un punto angoloso come richiesto dal testo del problema. Questa funzione è, quindi, adatta a descrivere il profilo del serbatoio.

La seconda funzione è già stata scartata mentre appare evidente che la terza funzione è derivabile per $x=0$ e quindi non va bene.

Domanda 2:

La famiglia di funzioni scelta è, come già detto,

$$f_1(x)=(1-|x|)^{\frac{1}{k}}$$

Troviamo adesso per quale valore di k si ottiene $\vartheta \geq 10°$. Dato che la derivata prima di una funzione calcolata in un punto rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla curva in quel punto per $x=0$ dovremo avere (conviene fare riferimento all'intervallo [-1,0]):

$$tg10°=\frac{1}{k}(1+x)^{\frac{1}{k}-1} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{k}\cong 0.17 \quad \rightarrow \quad k\cong 5.67$$

Possiamo utilizzare la funzione:

$$f_1(x)=(1-|x|)^{\frac{1}{5}}$$

Controlliamo:

$$\vartheta = arctg\frac{1}{k}=arctg\frac{1}{5}\cong 11°19'$$

Il valore scelto soddisfa i requisiti. Controlliamo adesso se va bene anche il volume. Calcoliamo prima l'area del profilo del serbatoio di figura 2. Teniamo presente che la funzione integranda è pari e, per evitare segni negativi, consideriamo l'intervallo [-1,0]:

$$Area_{profilo}=2\int_{-1}^{0}(1+x)^{\frac{1}{5}}dx=$$

Per sostituzione:

$$t=1+x \quad dx=dt \quad se\ x=-1 \quad t=0 \quad se\ x=0 \quad t=1$$

$$=2\int_0^1 t^{\frac{1}{5}}dt=2\left.\frac{t^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1}\right|_0^1=2\left.\frac{t^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}}\right|_0^1=2\frac{5}{6}m^2=\frac{5}{3}m^2$$

Adesso calcoliamo il volume:

$$V_{serbatoio}=8\frac{5}{3}m^3=\frac{40}{3}m^3>13m^3$$

Come richiesto.

Domanda 3:

Prima di determinare l'espressione di *V(z)* facciamo il grafico con l'indicazione del livello del liquido.

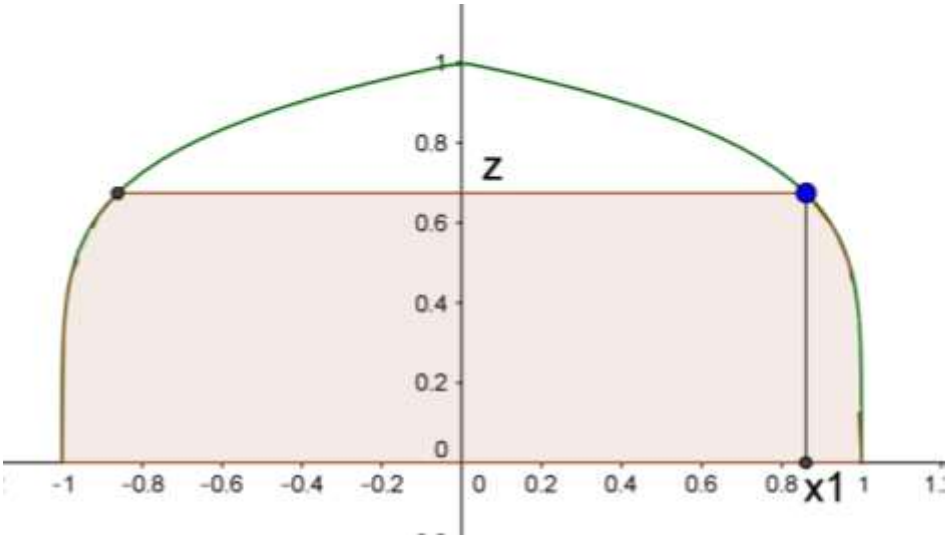

Figura 6 Grafico del profilo con indicazione del livello di liquido.

Per trovare il volume del liquido possiamo sottrarre al volume totale quello della parte vuota. Determiniamo il volume della parte vuota. La superficie della "base" del solido considerato si ottiene integrando la funzione tra *0* e x_1, raddoppiando come abbiamo fatto precedentemente e sottraendo l'area del rettangolo di base $2x_1$ e altezza *z*. Per esprimere il volume in funzione del livello z dobbiamo prima esprimere x_1 in funzione di z:

$$z = \sqrt[5]{(1 - x_1)}$$

Eleviamo alla quinta ambo i membri:

$$z^5 = 1 - x_1 \quad \rightarrow \quad x_1 = 1 - z^5$$

Area di base della parte vuota:

$$A_{base} = 2\int_0^{1-z^5} \sqrt[5]{(1-x)}\,dx - 2(1-z^5)z =$$

Per sostituzione:

$$t = 1 - x \quad dt = -dx \quad se\ x = 0 \quad t = 1 \quad se\ x = 1 - z^5 \quad t = z^5$$

$$= -2\int_1^1 t^{\frac{1}{5}}dt - 2(1-z^5)z = -2\left.\frac{t^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1}\right|_1^{z^5} - 2(1-z^5)z =$$

$$= -2\left.\frac{t^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}}\right|_1^{z^5} - 2(1-z^5)z = -2\frac{5}{6}(z^5)^{\frac{6}{5}} + 2\frac{5}{6} - 2(1-z^5)z = -\frac{5}{3}z^6 + \frac{5}{3} - 2(1-z^5)z =$$

$$= -\frac{5}{3}z^6 + \frac{5}{3} - 2z + 2z^6 = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}z^6 - 2z$$

Moltiplicando per la lunghezza del serba toio otteniamo il volume della parte vuota:

$$V_{parte\ vuota} = 8\left(\frac{5}{3} + \frac{1}{3}z^6 - 2z\right) = \frac{40}{3} + \frac{8}{3}z^6 - 16z$$

Quindi:

$$V_{liquido} = \frac{40}{3} - \frac{40}{3} - \frac{8}{3}z^6 + 16z = 16z - \frac{8}{3}z^6$$

Possiamo finalmente determinare la relazione richiesta che lega la percentuale di riempimento al livello del liquido:

$$V(z) = \frac{V_{liquido}}{V_{totale}} = \frac{16z - \frac{8}{3}z^6}{\frac{40}{3}} = \frac{6}{5}z - \frac{1}{5}z^6$$

Percentuale di riempimento per *z=50cm*:

$$V(0.5) = \frac{6}{5}0.5 - \frac{1}{5}0.5^6 \cong 0.5968 \cong 59.7\%$$

Domanda 4:

L'amministratore avrebbe ragione se il volume fosse direttamente proporzionale all'altezza raggiunta dal gasolio. Cioè se fosse:

$$V_{amm}(z) = z$$

Invece abbiamo trovato:

$$V(z) = \frac{6}{5}z - \frac{1}{5}z^6$$

Che non è lineare. Facciamo il grafico.

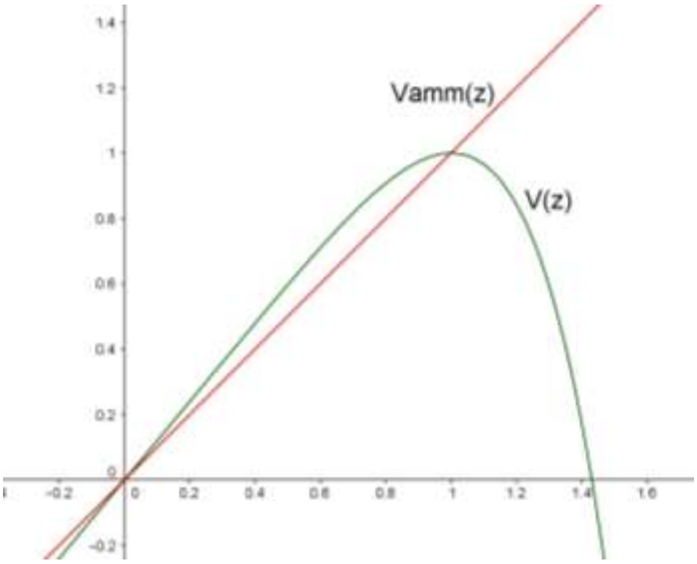

Figura 7 Espressioni del volume percentuale a confronto.

L'errore che si commette è dato dalla differenza delle due funzioni:

$$E(z) = \frac{6}{5}z - \frac{1}{5}z^6 - z = \frac{1}{5}z - \frac{1}{5}z^6$$

Per trovare l'errore massimo che si commette determiniamo la derivata prima:

$$E'(z) = \frac{1}{5} - \frac{6}{5}z^5$$

E troviamo per quale valore si annulla:

$$\frac{1}{5} - \frac{6}{5}z^5 = 0 \quad \rightarrow \quad 6z^5 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad z^5 = \frac{1}{6} \quad \rightarrow \quad z = \frac{1}{\sqrt[5]{6}} \cong 0.6988$$

Il punto trovato è un massimo infatti:

$$E'(z) = \frac{1}{5} - \frac{6}{5}z^5 > 0 \quad \rightarrow \quad 6z^5 - 1 < 0 \quad \rightarrow \quad z^5 < \frac{1}{6} \quad \rightarrow \quad z < \frac{1}{\sqrt[5]{6}}$$

Troviamo l'errore massimo:

$$E_{MAX}(z) = E\left(\frac{1}{\sqrt[5]{6}}\right) = \frac{1}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{6}} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{6}}\right)^6 \cong 0.1164 \cong 11.6\%$$

Matilde Consales