Problema 2

Nella figura 1 è rappresentato il grafico Γ della funzione continua f: $[0,+\infty) \to \mathbb{R}$, derivabile in $]0,+\infty)$, e sono indicate le coordinate di alcuni suoi punti.

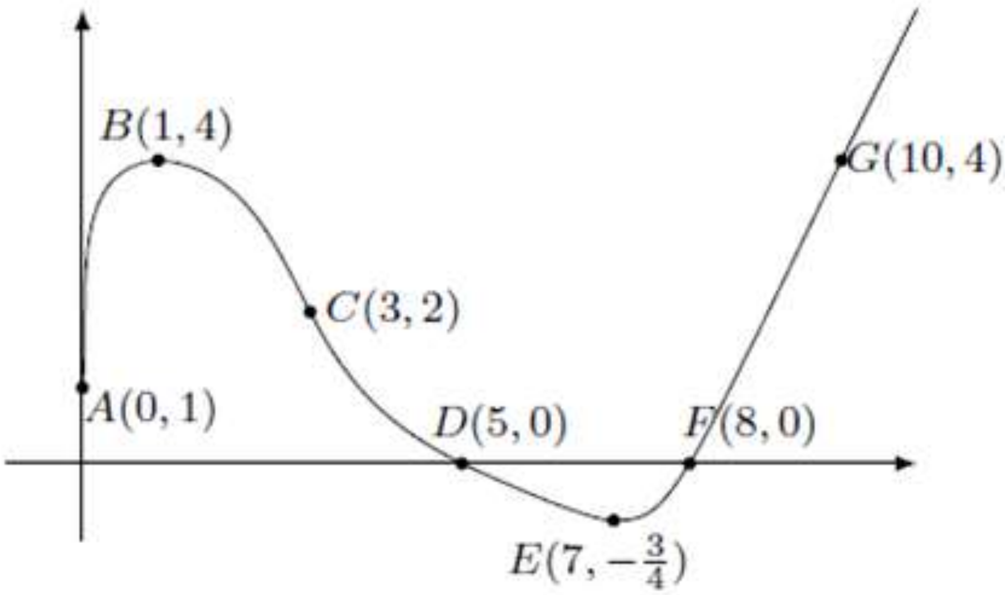

Figura 1

È noto che Γ è tangente all'asse y in A, che B ed E sono un punto di massimo e uno di minimo, che C è un punto di flesso con tangente di equazione $2x+y-8=0$.
Nel punto D la retta tangente ha equazione $x+2y-5=0$ e per $x \geq 8$ il grafico consiste in una semiretta passante per il punto G. Si sa inoltre che l'area della regione delimitata dall'arco $ABCD$, dall'asse x e dall'asse y vale 11, mentre l'area della regione delimitata dall'arco DEF e dall'asse x vale 1.

1. In base alle informazioni disponibili, rappresenta indicativamente i grafici delle funzioni

$$y = f'(x)$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

Quali sono i valori di $f'(3)$ e $f'(5)$? Motiva la tua risposta.

2. Rappresenta, indicativamente, i grafici delle seguenti funzioni:

$$y = |f'(x)|$$

$$y = |f(x)|'$$

$$y = \frac{1}{f(x)}$$

specificando l'insieme di definizione di ciascuna di esse.

3. Determina i valori medi di $y=f(x)$ e di $y=|f(x)|$ nell'intervallo $[0,8]$, il valore medio di $y=f'(x)$ nell'intervallo $[1,7]$ e il valore medio di $y=F(x)$ nell'intervallo $[9,10]$.

4. Scrivi le equazioni elle rette tangenti al grafico della funzione $F(x)$ nei suoi punti di ascisse 0 e 8, motivando le risposte.

Svolgimento

Domanda 1.

Osservando il grafico di figura 1 possiamo fare le seguenti deduzioni:

a) Nel punto A l'asse è tangente alla funzione che risulta crescente da A a B quindi:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$$

b) Dal punto A al punto B la funzione è crescente quindi la sua derivata è positiva;

c) B è un massimo quindi:

$$f'(1) = 0$$

d) Dato che il punto C ha tangente $2x+y-8=0$ il valore assunto dalla derivata prima in questo punto è il coefficiente angolare di questa retta:

$$2x + y - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad y = -2x + 8$$

Quindi:

$$f'(3) = -2$$

e) Lo stesso vale per il punto D che ha tangente $x+2y-5=0$:

$$x + 2y - 5 = 0 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Quindi:

$$f'(5) = -\frac{1}{2}$$

f) Il punto C è di flesso quindi la derivata seconda in questo punto vale 0 e, pertanto la derivata prima presenta, in questo punto, un massimo oppure un minimo. Dal grafico si vede che in C la funzione passa da concava a convessa quindi la derivata seconda risulta negativa per $x<3$ e positiva per $x>3$. Il punto è un minimo;

g) Dal punto B al punto E la funzione è decrescente quindi la sua derivata è negativa;

h) In E si ha un minimo quindi:

$$f'(7) = 0$$

i) Dal punto E al punto G la funzione è crescente quindi la derivata è positiva;

j) Dal punto F il grafico consiste in una semiretta passante per il punto G. Troviamo l'equazione. Equazione di una retta generica:

$$y = mx + q$$

Imponiamo il passaggio per i punti F e G

$$\begin{cases} 0 = 8m + q & \textit{passaggio per } F(8,0) \\ 4 = 10m + q & \textit{passaggio per } G(10,4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = -8m \\ 4 = 10m - 8m \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} q = -8m \\ 4 = 2m \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} m = 2 \\ q = -16 \end{cases}$$

In questo tratto:

$$f(x) = 2x - 16 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 2$$

Possiamo tracciare il grafico approssimativo della funzione:

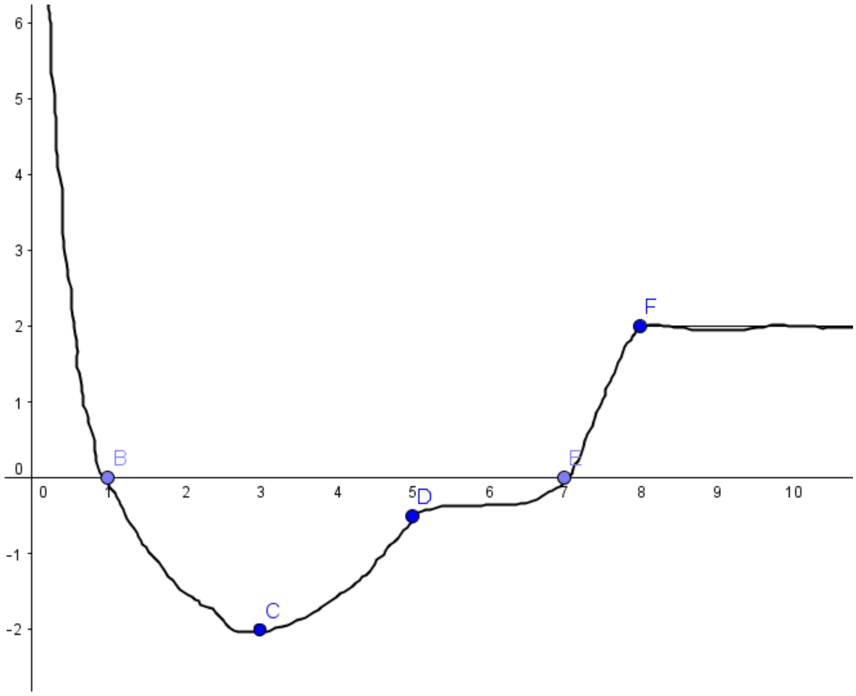

Figura 2 Grafico approssimativo di f(x).

Adesso concentriamoci sulla funzione *F(x)*, sempre in base al grafico di figura 1 possiamo dedurre quanto segue:

I. Nel tratto da A a D *f(x)>0* quindi *F(x)* è crescente;
II. Nel tratto da D a F *f(x)<0* quindi *F(x)* è decrescente;
III. Nel tratto da F a G *f(x)>0* quindi *F(x)* è crescente;
IV. Dato che *f(5)=0* (punto D) in questo punto *F(x)* presenta un minimo o un massimo. Ma in base alle considerazioni fatte nei punti precedenti deduciamo che questo punto è un massimo;
V. Dato che *f(8)=0* (punto F) in questo punto *F(x)* presenta un minimo o un massimo. Ma in base alle considerazioni fatte nei punti precedenti deduciamo che questo punto è un minimo;
VI. Dal testo sappiamo che $AREA_{ABCD}$=11 quindi:

$$F(5) - F(0) = \int_0^5 f(x)dx = 11$$

VII. Inoltre $AREA_{DEF}$=1 quindi:

$$F(8) - F(5) = \int_5^8 f(x)dx = -1$$

VIII. Dalle ultime due considerazioni si deduce che:

$$F(8) - F(0) = \int_0^8 f(x)dx = \int_0^5 f(x)dx + \int_5^8 f(x)dx = 11 - 1 = 10$$

IX. Per x>8 $f(x) = 2x - 16$ quindi:

$$F(x) = \int_0^8 f(t)dt + \int_8^x (2t - 16)dt = 10 + t^2 - 16t \Big|_8^x =$$

$$= 10 + x^2 - 16x - 64 + 128 = 10 + x^2 - 16x + 64 = x^2 - 16x + 74$$

X. Dalle considerazioni fatte si deduce che:

$$F(8) = 10 \qquad F(0) = 0 \qquad F(5) = 11$$

A questo punto possiamo disegnare il grafico approssimativo di *F(x)*:

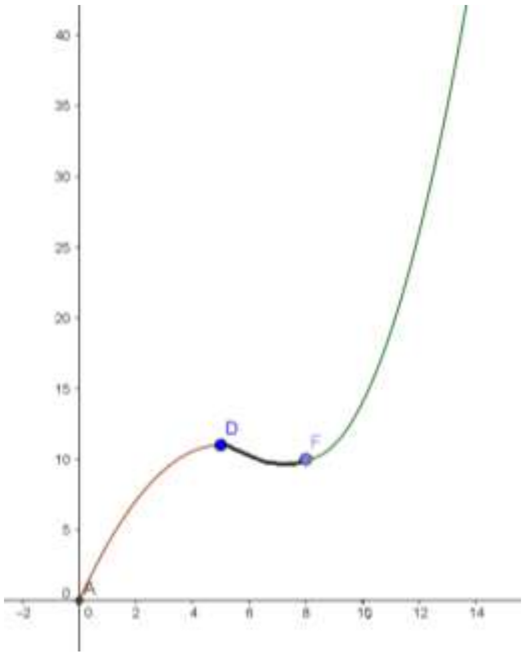

Figura 3 Il grafico approssimativo di F(x).

Per quanto già osservato ai punti d) ed e):

$$f'(3) = -2 \quad e \quad f'(5) = -\frac{1}{2}$$

Domanda 2.

La funzione $|f'(x)|$ è definita per *x*> è sempre positiva. Disegniamo il grafico:

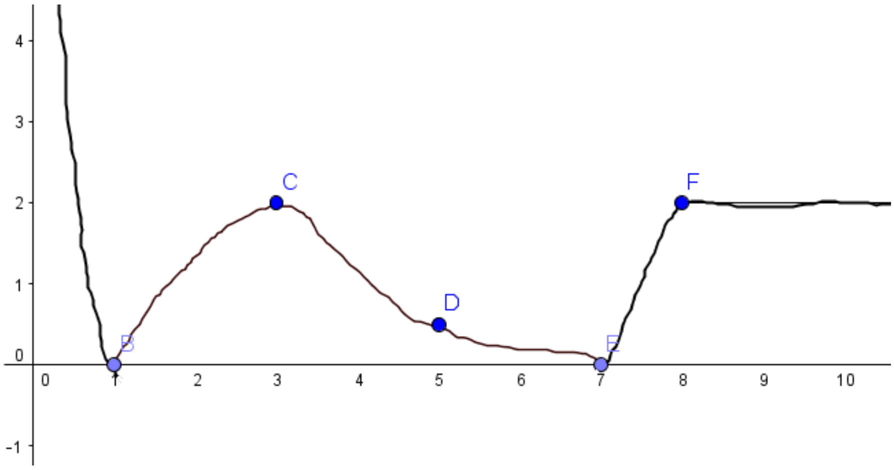

Figura 4 Il grafico approssimativo di |f'(x)|

Prima di tracciare il grafico di $|f(x)|'$ osserviamo che $|f(x)|$ è sempre positiva. Quindi il punto E avrà coordinate $\left(7, \frac{3}{4}\right)$ e sarà un punto di massimo.

Come al solito facciamo le nostre considerazioni per dedurre l'andamento di questa funzione.

A. Nel punto A l'asse è tangente alla funzione che risulta crescente da A a B quindi:

   a. $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$

B. Dal punto A al punto B la funzione è crescente quindi la sua derivata è positiva;
C. B è un massimo quindi:

$$|f(1)|' = 0$$

D. Dato che il punto C ha tangente $2x+y-8=0$ il valore assunto dalla derivata prima in questo punto è il coefficiente angolare di questa retta:

$$2x + y - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad y = -2x + 8$$

Quindi:

$$|f(3)|' = -2$$

E. Nel punto D la funzione $|f(x)|'$ presenta un punto angoloso quindi non è derivabile. Ricordiamo che *f(x)* in questo punto ha tangente $x+2y-5=0$:

$$x + 2y - 5 = 0 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

$|f(x)|'$, invece, presenterà due tangenti in D: una a sinistra di equazione:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Ed una destra di equazione:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Quindi:

$$|f(5)|'_- = -\frac{1}{2} \quad e \quad |f(5)|'_+ = \frac{1}{2}$$

F. Il punto C è di flesso quindi la derivata seconda in questo punto vale 0 e, pertanto la derivata prima presenta, in questo punto, un massimo oppure un minimo. Dal grafico si vede che in C la funzione passa da concava a convessa quindi la derivata seconda risulta negativa per $x<3$ e positiva per $x>3$. Il punto è un minimo;
G. Dal punto B al punto D la funzione è decrescente quindi la sua derivata è negativa;
H. Dal punto D al punto E la funzione è crescente quindi la sua derivata è positiva;
I. In E si ha un massimo quindi:

$$|f(7)|' = 0$$

J. Dal punto E al punto F la funzione è decrescente quindi la derivata è negativa;
K. Nel punto F la funzione $|f(x)|'$ presenta un punto angoloso quindi non è derivabile. Abbiamo già visto che dal punto F in poi (per $x \geq 8$) si trova:

$$f(x) = 2x - 16$$

Ma, dato che *f(x)* è continua la tangente sinistra in F è data da:

$$y = -2x - 16$$

Quindi:

$$|f(8)|'_- = -2$$

L. Per $x>8$:

$$|f(x)|' = 2$$

A questo punto abbiamo tutti gli elementi per tracciare il grafico tenendo presente che:

$$|f(x)|' \text{ è } definita\ per\ x \neq 0, x \neq 5\ e\ x \neq 8$$

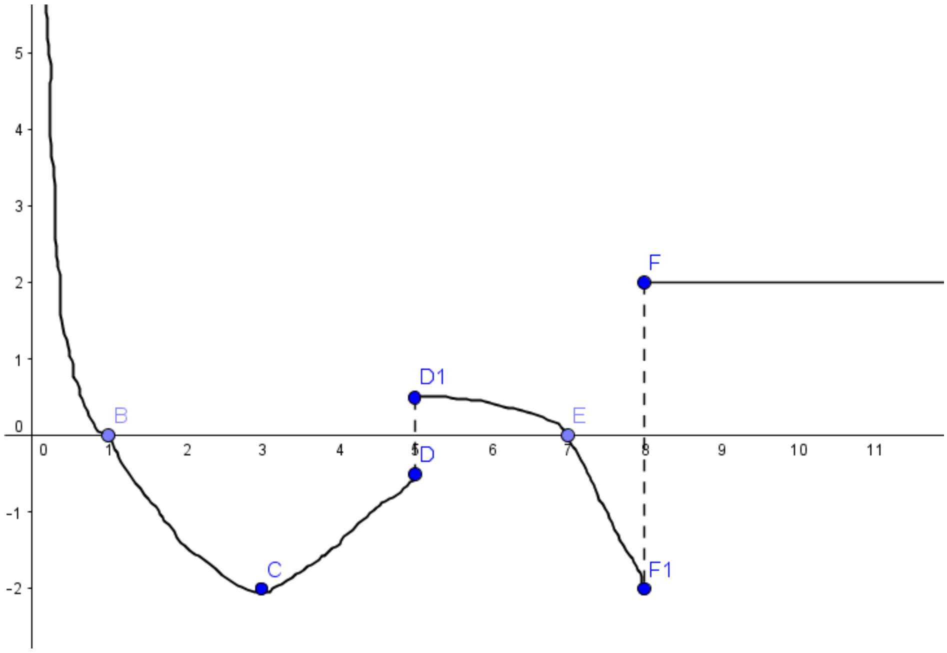

Figura 5 Il grafico approssimativo di |f(x)|'.

Prima di disegnare il grafico $\frac{1}{f(x)}$ osserviamo che non è definita per *x=5* e *x=8* e che per *x>8*:

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2x - 16}$$

Inoltre poiché la derivata prima di una funzione inversa vale:

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

E quindi:

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad g'(x) = 0$$

I punti di massimo per *f(x)* sono punti di minimo per *g(x)* e i punti di minimo per *f(x)* sono punti di massimo per *g(x)*.

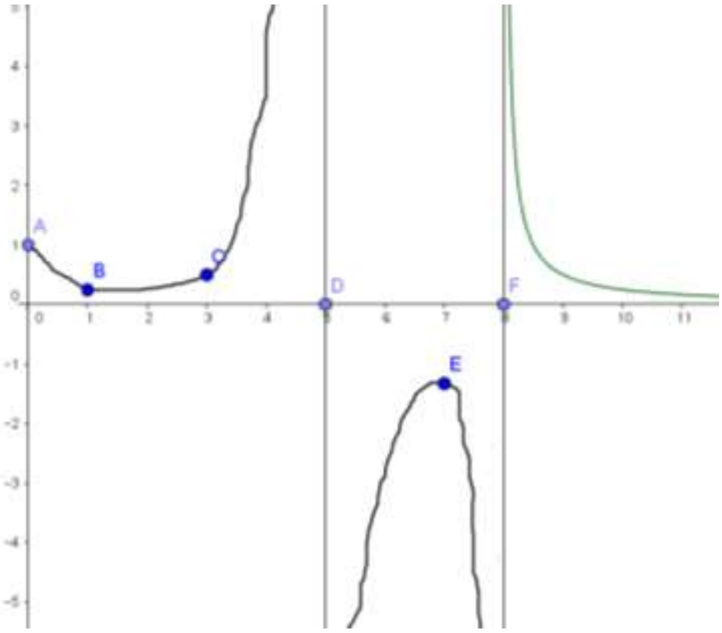

Figura 6 Grafico approssimativo di 1/f(x).

Domanda 3.

Il valore medio di una funzione nell'intervallo [a, b] è dato da:

$$M_{a,b} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

Valore medio di *f(x)* nell'intervallo [0, 8]:

$$M_{0,8} = \frac{\int_0^8 f(x)dx}{8-0} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

Valore medio di |*f(x)*| nell'intervallo [0, 8]:

$$M_{0,8} = \frac{\int_0^8 |f(x)|dx}{8-0} = \frac{\int_0^5 |f(x)|dx + \int_5^8 |f(x)|dx}{8} = \frac{11+1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{4}$$

Valore medio di *f'(x)* nell'intervallo [1, 7]:

$$M_{1,7} = \frac{\int_1^7 f'(x)dx}{7-1} = \frac{f(7)-f(1)}{6} = \frac{-\frac{3}{4}-4}{6} = \frac{-\frac{19}{4}}{6} = -\frac{19}{24}$$

Valore medio di F*(x)* nell'intervallo [9, 10]:

$$M_{9,10} = \frac{\int_9^{10} F(x)dx}{10-9} = \int_9^{10} (x^2-16x+74)dx = \left.\frac{x^3}{3} - 16\frac{x^2}{2} + 74x\right|_9^{10} =$$

$$= \frac{1000}{3} - 800 + 740 - \frac{729}{3} + 648 - 666 = \frac{271}{3} - 78 = \frac{271-234}{3} = \frac{37}{3}$$

Domanda 4.

Retta tangente a *F(x)* nel punto di ascissa 0.
Abbiamo visto che *F(0)=0* inoltre:

$$F'(0) = f(0) = 1$$

Quindi la retta tangente cercata ha coefficiente angolare 1:

$$y = x + q$$

Ma, dato che *F(0)=0* questa retta deve passare per l'origine:

$$0 = 0 + q \quad \rightarrow \quad q = 0$$

La tangente richiesta è la retta di equazione:

$$y = x$$

Retta tangente a *F(x)* nel punto di ascissa 8.

Abbiamo visto prima che nel punto F la funzione *F(x)* presenta un punto di minimo, inoltre sappiamo che F(8)=10 quindi la tangente cercata è parallela all'asse delle ascisse ed ha equazione:

$$y = 10$$

Matilde Consales