Quesito 1

È noto che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Stabilire se il numero reale u, tale che:

$$\int_{-\infty}^{u} e^{-x^2} dx = 1$$

è positivo oppure negativo. Determinare inoltre i valori dei seguenti integrali, motivando le risposte:

$$A = \int_{-u}^{u} x^7 e^{-x^2} dx \quad B = \int_{-u}^{u} e^{-x^2} dx \quad C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2} dx$$

Svolgimento

Facciamo il grafico:

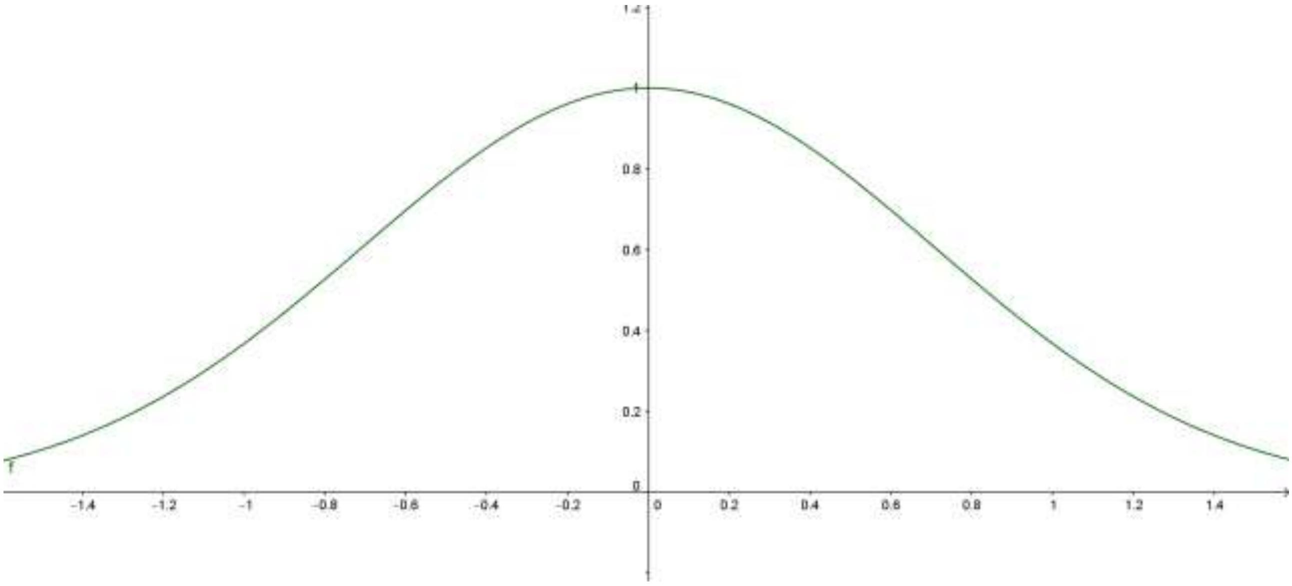

Figura 1

Osserviamo che la funzione integranda presenta simmetria pari. Infatti:

$$f(x) = f(-x) \; con \; f(x) = e^{-x^2}$$

Ma allora:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Ora, dato che:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cong 0.886 < 1$$

u è positivo.

$$\int_{-u}^{u} x^7 \, e^{-x^2} dx = 0$$

Perché la funzione integranda è dispari.

Possiamo scrivere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{u} e^{-x^2}dx + \int_{u}^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

Sostituendo i valori che conosciamo:

$$\sqrt{\pi} = 1 + \int_{u}^{+\infty} e^{-x^2}dx \quad \rightarrow \quad \int_{u}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} - 1$$

Abbiamo già osservato che *u* è positivo quindi:

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_{0}^{u} e^{-x^2}dx + \int_{u}^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

Sostituendo i valori noti:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_{0}^{u} e^{-x^2}dx + \sqrt{\pi} - 1 \quad \rightarrow \quad \int_{0}^{u} e^{-x^2}dx = 1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

E, dato che la funzione integranda è pari:

$$\int_{-u}^{0} e^{-x^2}dx = \int_{0}^{u} e^{-x^2}dx = 1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Da cui segue che

$$\int_{-u}^{u} e^{-x^2}dx = \int_{-u}^{0} e^{-x^2}dx + \int_{0}^{u} e^{-x^2}dx = 2\int_{0}^{u} e^{-x^2}dx$$

Ma allora:

$$\int_{-u}^{u} e^{-x^2}dx = 2 - \sqrt{\pi}$$

Consideriamo adesso:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2}dx$$

Poniamo:

$$t^2 = 5x^2 \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{5}x \quad \rightarrow \quad dt = \sqrt{5}dx \quad \rightarrow \quad dx = \frac{dt}{\sqrt{5}}$$

$$se\ x = -\infty \quad t = -\infty \qquad se\ x = +\infty \quad t = +\infty$$

Sostituiamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{5}}$$

Matilde Consales