Quesito 10

Sia *f* la funzione così definita nell'intervallo $]1, +\infty)$

$$f(x) = \int_{e}^{x^2} \frac{t}{lnt} dt$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di *f* nel suo punto di ascissa $\sqrt{e}$.

Svolgimento

La funzione integranda è continua nell'intervallo $[e, +\infty]$ quindi, per il teorema fondamentale del calcolo integrale (o di Torricelli Barrow) possiamo scrivere:

$$f(x) = \int_{e}^{x^2} \frac{t}{lnt} dt = F(x^2) - F(e)$$

Scriviamo adesso l'equazione di una retta generica:

$$y = mx + q$$

Il coefficiente angolare di una retta tangente ad una curva è dato dalla derivata della curva calcolata nel punto di tangenza. Troviamo la derivata:

$$f'(x) = \frac{dF(x^2)}{dx} - \frac{dF(e)}{dx}$$

E, dato che *F(e)* è costante:

$$f'(x) = 2x \frac{x^2}{lnx^2}$$

Il coefficiente angolare della retta tangente è dato da:

$$m = f'(\sqrt{e}) = 2\sqrt{e} \cdot \frac{e}{lne} = 2e\sqrt{e}$$

Quindi la retta tangente è data da:

$$y = 2e\sqrt{e} \cdot x + q$$

L'ordinata del punto di tangenza è data dal valore di *f(x)* nel punto $\sqrt{e}$.

$$f(\sqrt{e}) = \int_{e}^{\sqrt{e}^2} \frac{t}{lnt} dt = \int_{e}^{e} \frac{t}{lnt} dt = F(e) - F(e) = 0$$

Imponiamo alla retta tangente il passaggio per il punto $(\sqrt{e},\ 0)$:

$$0 = 2e\sqrt{e} \cdot \sqrt{e} + q \quad \rightarrow \quad 2e^2 + q = 0 \quad \rightarrow \quad q = -2e^2$$

Possiamo scrivere l'equazione della retta cercata:

$$y = 2e\sqrt{e} \cdot x - 2e^2$$

Matilde Consales