Quesito 2

Data una parabola di equazione

$$y = 1 - ax^2 \ \ con\ a > 0$$

si vogliono inscrivere dei rettangoli, con un lato sull'asse x, nel segmento parabolico delimitato dall'asse x. Determinare a in modo tale che il rettangolo di area massima sia anche il rettangolo di perimetro massimo.

Svolgimento

Facciamo il grafico:

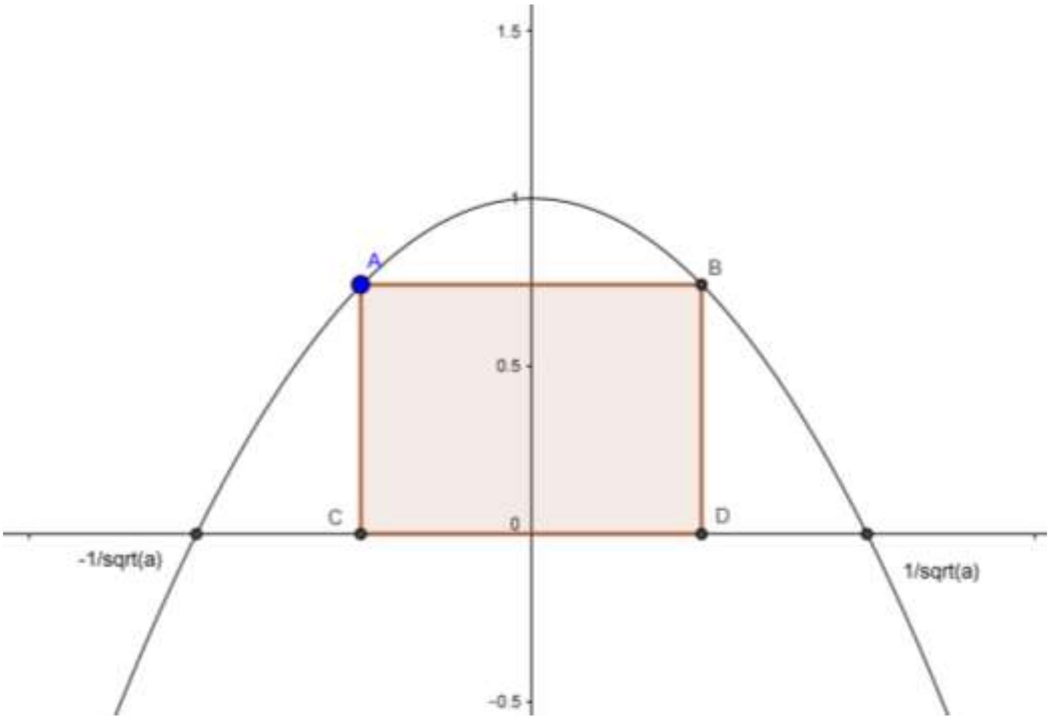

Figura 1

Dall'equazione si deduce che la parabola ha vertice di coordinate $V = (0, 1)$, è concava e interseca l'asse delle ascisse nei punti:

$$y = 1 - ax^2 = 0 \quad x^2 = \frac{1}{a} \quad \rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{a}}$$

Consideriamo il rettangolo di figura e poniamo *AB*=*CD*=*2t* ma allora, dato che i punti A e B appartengono alla parabola:

$$AC = BD = 1 - at^2$$

Determiniamo il perimetro:

$$P(t) = 2(2t + 1 - at^2)$$

Troviamo la derivata prima:

$$\frac{dP(t)}{dt} = 2(2 - 2at)$$

Si annulla per

$$1 - at = 0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{1}{a}$$

Ed è positiva per:

$$t < \frac{1}{a}$$

Il punto

$$t = \frac{1}{a}$$

È un massimo. Il perimetro massimo vale:

$$P\left(\frac{1}{a}\right) = 2\left(\frac{2}{a} + 1 - a\frac{1}{a^2}\right) = 2\left(\frac{2}{a} + 1 - \frac{1}{a}\right) = 2\left(\frac{1}{a} + 1\right)$$

Calcoliamo l’area:

$$A = 2t(1 - at^2) = 2t - 2at^3$$

Il valore di t che rende massimo il perimetro deve essere lo stesso per cui risulta massima l’area:

$$A\left(\frac{1}{a}\right) = 2\frac{1}{a} - 2a\frac{1}{a^3} = \frac{2}{a} - \frac{2}{a^2} = 2\frac{a-1}{a^2}$$

Troviamo per quale valore di a questa funzione è massima:

$$\frac{dA}{da} = 2\frac{a^2 - 2a(a-1)}{a^4} = 2\frac{a - 2a + 2}{a^3} = 2\frac{2-a}{a^3}$$

La derivata prima si annulla per:

$$a = 2$$

Dato che:

$$se\ a < 2 \quad \frac{dA}{da} > 0 \quad e \quad se\ a > 2 \quad \frac{dA}{da} < 0$$

Il punto *a=2* è un massimo ed è il valore cercato. Per questo valore $t = \frac{1}{2}$

Anche se non richiesto troviamo l’area massima si ha per $a = 2 \;\; t = \frac{1}{2}$:

$$A_{MAX} = 2\frac{1}{2} - 2 \cdot 2\frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Sostituendo gli stessi valori per il perimetro si trova:

$$P_{MAX} = 2\left(\frac{1}{2} + 1\right) = 2\frac{3}{2} = 3$$

Ridisegniamo il grafico con questo valore di *a*

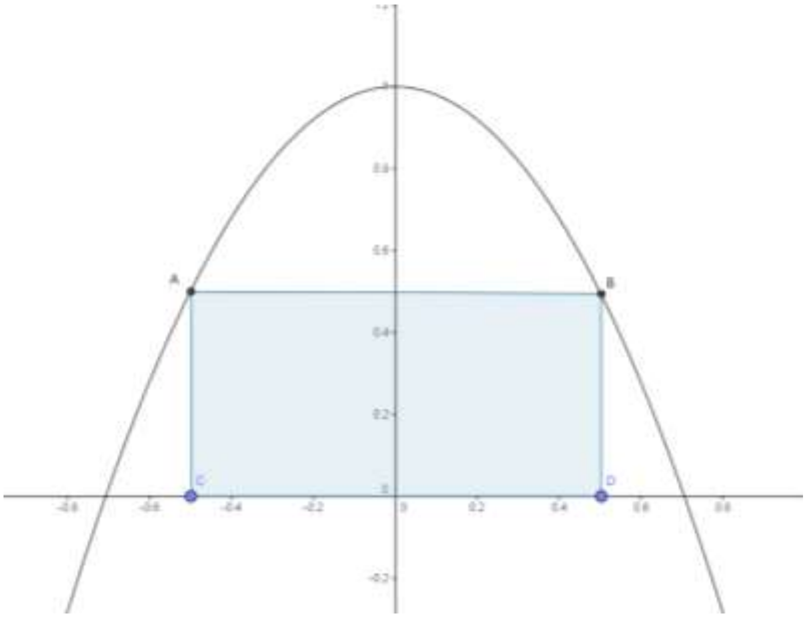

Figura 2 Rettangolo di area e perimetro massimi.

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales