**Quesito 3**

Un recipiente sferico con raggio interno $r$ è riempito con un liquido fino all'altezza $h$. Utilizzando il calcolo integrale, dimostrare che il volume del liquido è dato da:

$$V = \pi\left(rh^2 - \frac{h^3}{3}\right)$$

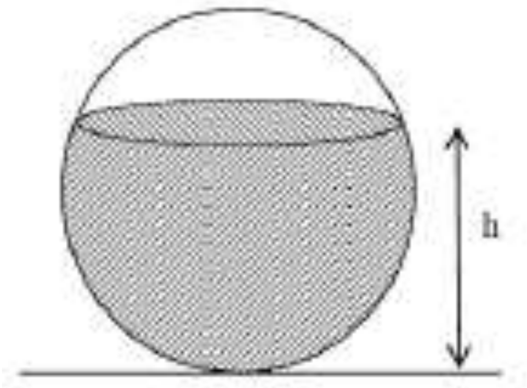


Figura 1 La sfera contenente il liquido.

**Svolgimento**

Per calcolare il volume richiesto consideriamo il cerchio con centro nell'origine degli assi e raggio r rappresentato in figura 2.

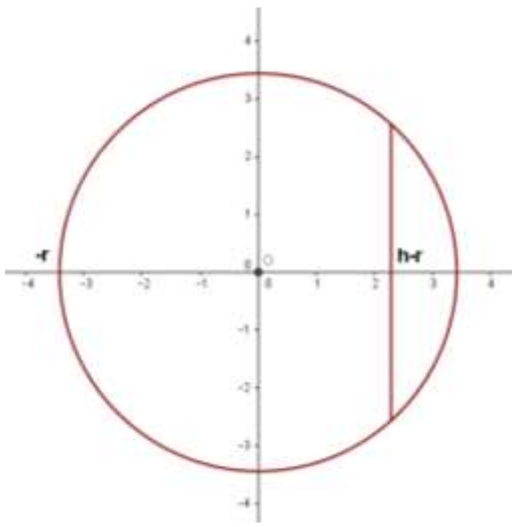


Figura 2

L'equazione del cerchio raffigurato è data da:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Da cui si ricava:

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

Per trovare il volume del solido di rotazione dobbiamo integrare l'area. L'area del cerchio di figura 2 vale:

$$A_{CERCHIO} = \pi(r^2 - x^2)$$

Per determinare il volume del liquido dobbiamo integrare tra $-r$ e $h$-$r$:

$$V_{LIQUIDO} = \pi \int_{-r}^{h-r} (r^2 - x^2)\, dx =$$

$$= \pi \left( r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-r}^{h-r} = \pi \left[ r^2 (h-r) - \frac{(h-r)^3}{3} - \left( -r^3 + \frac{r^3}{3} \right) \right] =$$

$$= \pi \left[ hr^2 - r^3 - \frac{1}{3}(h^3 - 3h^2 r + 3hr^2 - r^3) + r^3 - \frac{r^3}{3} \right] =$$

$$= \pi \left[ hr^2 - \frac{h^3}{3} + h^2 r - hr^2 + \frac{r^3}{3} - \frac{r^3}{3} \right] = \pi \left( h^2 r - \frac{h^3}{3} \right)$$



Matilde Consales