Quesito 4

Un test è costituito da 10 domande a risposta multipla, con 4 possibili risposte di cui solo una è esatta. Per superare il test occorre rispondere esattamente almeno a 8 domande. Qual è la probabilità di superare il test rispondendo a caso alle domande?

Svolgimento

Osserviamo che abbiamo prove ripetute (ogni domanda è una prova) con le seguenti caratteristiche:

- Ad ogni prova si hanno due esiti possibili (risposta esatta o risposta sbagliata);
- La probabilità che si verifichi un successo (risposta esatta) o un insuccesso (risposta sbagliata) è costante;
- I risultati delle prove sono indipendenti (una particolare risposta ad una domanda non influenza in alcun modo la risposta alle altre).

La probabilità di rispondere esattamente ad una domanda è p=0.25 (4 possibili risposte di cui solo una esatta).
La variabile aleatoria che descrive ogni singola prova è binomiale o di Bernoulli. Assume solo 2 valori: 1=risposta esatta, 0=risposta errata:

$$X_i = \begin{cases} 1 & p(X_i = 1) = 0.25 \\ 0 & p(X_i = 0) = 0.75 \end{cases}$$

Indichiamo con X il numero di successi in 10 prove. Dato che per superare il test occorre rispondere esattamente ad almeno 8 domande la probabilità cercata è data da:

$$p(X \geq 8) = p(X = 10) + p(X = 9) + p(X = 8)$$

Ricordando che, per una variabile aleatoria di Bernoulli, la probabilità di *k* successi in *n* prove vale:

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Possiamo scrivere:

$$p(X \geq 8) = \binom{10}{10} 0.25^{10} \cdot 0.75^0 + \binom{10}{9} 0.25^9 \cdot 0.75^1 + \binom{10}{8} 0.25^8 \cdot 0.75^2 =$$

$$= \frac{10!}{10!} 0.25^{10} + \frac{10!}{9!} 0.25^9 \cdot 0.75 + \frac{10!}{8!} 0.25^8 \cdot 0.75^2 =$$

$$= 0.25^{10} + 10 \cdot 0.25^9 \cdot 0.75 + 90 \cdot 0.25^8 \cdot 0.75^2 = 8.02 \cdot 10^{-4}$$

La probabilità di superare il test rispondendo a caso alle domande è:

$$p = 0.0008 = 0.08\%$$

Matilde Consales