Quesito 9

Date le rette:

$$r:\ \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \qquad e \qquad s:\ \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

e il punto $P(1, 0, -2)$ determinare l'equazione del piano passante per P e parallelo alle due rette.

Svolgimento

Per ricavare il vettore direttore della retta s dobbiamo scriverla il forma parametrica:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}y + y + z - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}y \\ \frac{3}{2}y + z - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}y \\ z = -\frac{3}{2}y + 3 \end{cases}$$

Equazione parametrica:

$$s:\ \begin{cases} x = \frac{1}{2}t \\ y = t \\ z = -\frac{3}{2}t + 3 \end{cases}$$

Scriviamo i vettori direttori:

$$v_r = [1, 2, 1] \quad v_s = \left[\frac{1}{2}, 1, -\frac{3}{2}\right]$$

Il piano deve passare per il punto P quindi il suo vettore direttore deve essere:

$$v_\alpha = [x - x_P, y - y_P, z - z_P] = [x - 1, y, z + 2]$$

Affinché risulti parallelo alle due rette date il vettore direttore del piano e quelli delle due rette devono essere linearmente dipendenti quindi la matrice:

$$\begin{pmatrix} x - 1 & y & z + 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Deve avere determinante nullo. Calcoliamo il determinante:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y & z + 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2+1} \cdot 1 \begin{bmatrix} y & z + 2 \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 2 \begin{bmatrix} x - 1 & z + 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 1 \begin{bmatrix} x - 1 & y \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= -\left(-\frac{3}{2}y - z - 2\right) + 2\left(-\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}z - 1\right) - \left(x - 1 - \frac{1}{2}y\right) =$$

$$= \frac{3}{2}y + z + 2 - 3x + 3 - z - 2 - x + 1 + \frac{1}{2}y =$$

$$= -4x + 2y + 4$$

L’equazione del piano è:

$$\alpha: \ -4x + 2y + 4 = 0$$

Matilde Consales