Problema 1

Si può pedalare agevolmente su una bicicletta a ruote quadrate? A New York, al MoMath-Museum of Mathematics si può fare, in uno dei padiglioni dedicati al divertimento matematico (figura 1). È però necessario che il profilo della pedana su cui il lato della ruota può scorrere abbia alcuni requisiti.
In figura 2 è riportata una rappresentazione della situazione nel piano cartesiano *Oxy*: il quadrato di lato DE=2 (in opportune unità di misura) e di centro C rappresenta la ruota della bicicletta, il grafico della funzione *f(x)* rappresenta il profilo della pedana.

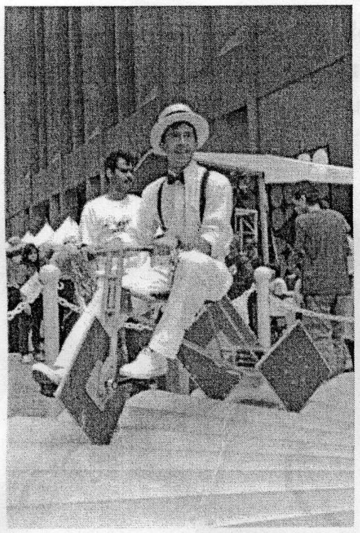

Figura 1

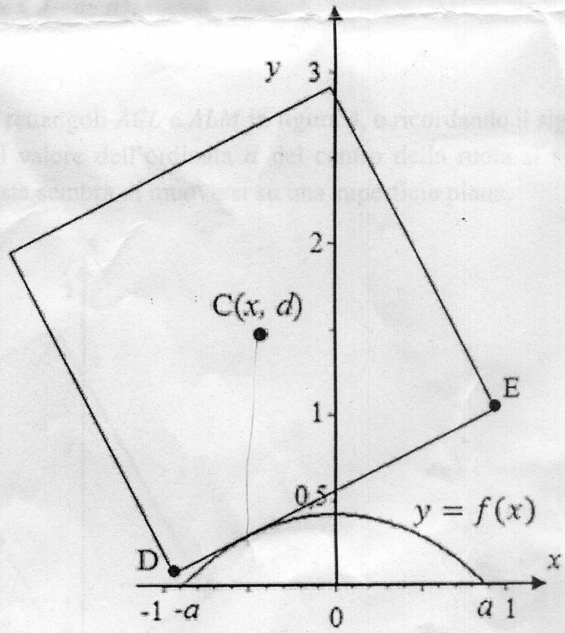

Figura 2

1. Sulla base delle informazioni ricavabili dal grafico in figura 2, mostra, con le opportune argomentazioni, che la funzione:

$$f(x) = \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad x \in \mathcal{R}$$

Rappresenta adeguatamente il profilo della pedana per $x \epsilon [-a, a]$, determina inoltre il valore degli estremi $-a$ e a dell'intervallo.
Per visualizzare il profilo completo della pedana sulla quale la bicicletta potrà muoversi, si affiancano varie copie del grafico della funzione *f(x)* relativo all'intervallo $[-a, a]$, come mostrato in figura 3.

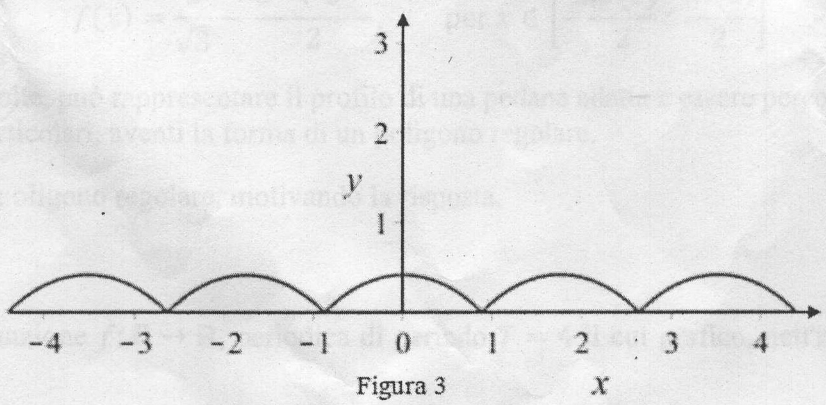

Figura 3

2. Perché la bicicletta possa procedere agevolmente sulla pedana è necessario che:
    - A sinistra e a destra dei punti di non derivabilità i tratti del grafico siano ortogonali;
    - La lunghezza del lato della ruota quadrata sia pari alla lunghezza di una "gobba", cioè dell'arco di curva di equazione $y = f(x) per\ x \in [-a, a]$

    Stabilisci se tali condizioni sono verificate.[1]
3. Considerando la similitudine dei triangoli rettangoli *ACL* e *ALM* in figura 4, e ricordando il significato geometrico della derivata, verifica che il valore dell'ordinata d del centro della ruota si mantiene costante durante il moto. Pertanto, al ciclista sembra di muoversi su una superficie piana.

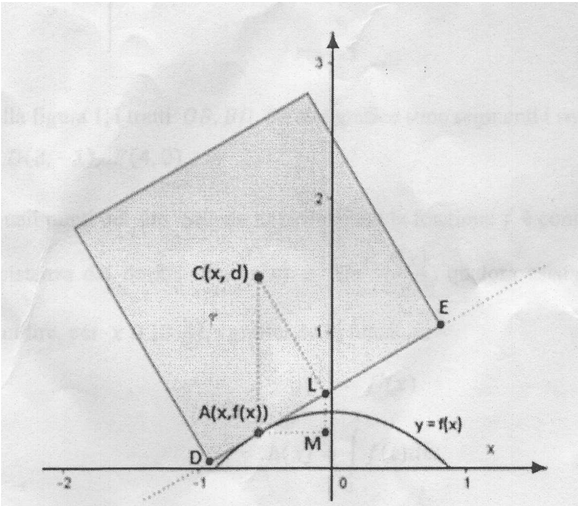

Figura 4

4. Anche il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad x \in \left[-\frac{ln3}{2}, \frac{ln3}{2}\right]$$

Se replicato varie volte, può rappresentare il profilo di una pedana adatta a essere percorsa da una bicicletta con ruote molto particolari, aventi la forma di un poligono regolare.
Individua tale poligono regolare, motivando la risposta.

Svolgimento

Punto 1

Supponiamo che la ruota sia costituita di materiale omogeneo in modo che il centro C sia anche il baricentro. Il punto C deve descrivere, durante il moto, una linea retta parallela all'asse delle ascisse. Per determinare l'equazione di tale retta osserviamo che:

- quando il profilo della pedana presenta punti di minimo *(f(x)=0)* la ruota si trova con un vertice coincidente con tali punti. In questo caso l'ordinata del punto C deve valere metà diagonale del quadrato. Detta *d* l'ordinata in questione troviamo:

$$d = l\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

- Per quanto osservato prima il punto C deve, durante il moto, descrivere una retta di equazione: $y = \sqrt{2}$.

[1] In generale, la lunghezza dell'arco di curva avente equazione $y=\varphi(x)$ compreso tra le ascisse x_1 e x_2 è data da $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\, dx$.

- Durante il moto il tratto di profilo della pedana che va da *–a* ad *a* deve essere tangente punto per punto ad un lato del quadrato. Questo comporta che la lunghezza della curva in quel tratto sia uguale alla lunghezza del lato. Inoltre quando un lato del quadrato si trova parallelo all'asse delle ascisse il punto di tangenza deve essere il massimo della funzione che descrive il profilo della pedana. In questo caso possiamo scrivere:

$$d = \frac{l}{2} + f(0)$$

  Troviamo il valore di *f(0)* (massimo della funzione che rappresenta il profilo della pedana come si vede dalla figura 2).

$$\sqrt{2} = 1 + f(0)$$

  Da cui si ricava:

$$f(0) = \sqrt{2} - 1$$

  Vediamo se la funzione proposta soddisfa questa relazione:

$$f(0) = \sqrt{2} - \frac{e^0 + e^0}{2} = \sqrt{2} - 1$$

  La relazione è soddisfatta.

- Il tratto del profilo della pedana che va da *–a* ad *a* deve presentare simmetria pari (vedi figura 2).

$$f(x) = f(-x)$$

$$\sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sqrt{2} - \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2}$$

Anche questa condizione è soddisfatta.

Concludiamo che la funzione proposta il profilo della pedana per $x\epsilon[-a, a]$.
Per calcolare *a* usiamo la relazione:

$$f(a) = 0 \qquad con\, a > 0$$

$$\sqrt{2} - \frac{e^a + e^{-a}}{2} = 0$$

$$2\sqrt{2} - e^a - e^{-a} = 0$$

Moltiplichiamo ambo i membri per e^a:

$$2\sqrt{2}e^a - e^{2a} - 1 = 0$$

$$e^{2a} - 2\sqrt{2}e^a + 1 = 0$$

Poniamo $t = e^a$ e risolviamo l'equazione di secondo grado in *t*:

$$t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 = 0$$

$$t_{1-2} = \sqrt{2} \pm \sqrt{2-1} = \sqrt{2} \pm 1$$

Consideriamo la soluzione $t_1 = \sqrt{2} + 1$

$$e^a = \sqrt{2} + 1$$

$$\ln e^a = \ln(\sqrt{2}+1)$$

$$a = \ln(\sqrt{2}+1)$$

Poiché $\sqrt{2}-1 \cong 0.41$ $\ln(\sqrt{2}-1) < 0$ questa soluzione non è accettabile.

Concludiamo che $a = \ln(\sqrt{2}+1)$.

Punto 2

Per verificare che a sinistra e a destra dei punti di non derivabilità i tratti del grafico siano ortogonali dobbiamo determinare le tangenti nei punti *a* e –*a*. Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = -\frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Tangente alla curva nel punto *a*:

$$y = f'(a)(x-a)$$

$$f'(a) = -\frac{e^a - e^{-a}}{2} = -\frac{e^{\ln(\sqrt{2}+1)} - e^{-1\ (\sqrt{2}+1)}}{2} =$$

$$= \frac{e^{\ln\frac{1}{\sqrt{2}+1}} - e^{\ln(\sqrt{2}+1)}}{2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}+1} - (\sqrt{2}+1)}{2} =$$

$$= \frac{\frac{1-(\sqrt{2}+1)^2}{\sqrt{2}+1}}{2} = \frac{\frac{1-2-2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}{2} = \frac{\frac{-2(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1}}{2} = -1$$

La retta cercata ha equazione data da:

$$y = -(x - \ln(\sqrt{2}+1))$$

$$y = -x + \ln(\sqrt{2}+1)$$

Tangente alla curva nel punto -*a*:

$$y = f'(-a)(x-a)$$

$$f'(a) = -\frac{e^a - e^{-a}}{2} = -\frac{e^{-\ln(\sqrt{2}+1)} - e^{\ln(\sqrt{2}+1)}}{2} =$$

$$= \frac{e^{\ln(\sqrt{2}+1)\ln\frac{1}{\sqrt{2}+1}} - e^{\ln\frac{1}{\sqrt{2}+1}}}{2} = \frac{\sqrt{2}+1-\frac{1}{\sqrt{2}+1}}{2} =$$

$$= \frac{\frac{(\sqrt{2}+1)^2-1}{\sqrt{2}+1}}{2} = \frac{\frac{2+2\sqrt{2}+1-1}{\sqrt{2}+1}}{2} = \frac{\frac{2(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1}}{2} = 1$$

La retta cercata ha equazione data da:

$$y = x - \ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

Poiché il prodotto dei coefficienti angolari di queste due rette vale $-1 \cdot 1 = -1$ le due rette sono tra loro perpendicolari.

Calcoliamo ora la lunghezza dell'arco di curva di equazione $y = f(x) per\ x \in [-a, a]$:

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx =$$

$$= \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \left(-\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2}\, dx =$$

$$= \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4}}\, dx = \int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}}\, dx =$$

$$= \int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}}\, dx = \int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{(e^x + e^{-x})^2}{4}}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} (e^x + e^{-x})\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\Big|_{-a}^{a} = \frac{1}{2}(e^a - e^{-a} - e^{-a} + e^a) = \frac{1}{2}(2e^a - 2e^{-a}) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}(e^a - e^{-a}) = e^a - e^{-a}$$

Sostituendo ad a il suo valore:

$$l_{curva} = e^{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)} - e^{-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)} =$$

$$= e^{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)} - e^{\ln\frac{1}{\sqrt{2}+1}} = \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2 - 1}{\sqrt{2}+1} =$$

$$= \frac{2 + 2\sqrt{2} \cancel{+ 1 - 1}}{\sqrt{2}+1} = \frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}+1} = 2$$

La lunghezza cercata è pari al lato della ruota della bicicletta.

Punto 3

Facciamo un disegno:

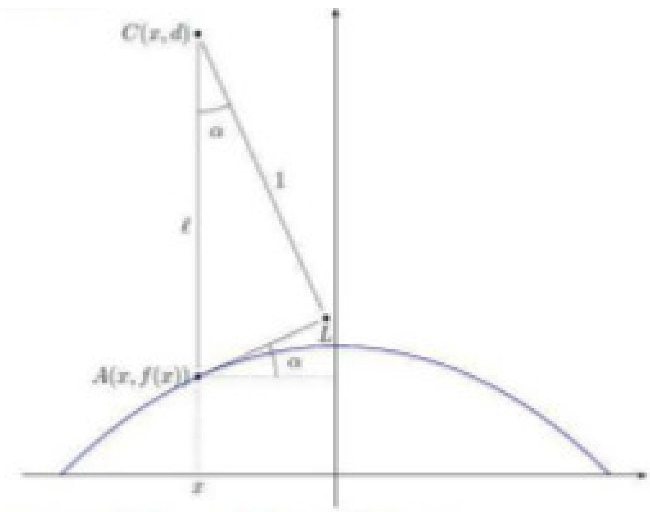

Figura 5

L'ordinata del punto C durante il moto vale:

$$d = l + f(x) \ \ (1)$$

Dove, poiché dalla similitudine dei triangoli ACL e ALM segue che $\widehat{ACL} \cong \widehat{LAM}$:

$$l = \frac{\frac{lato\ del\ quadrato}{2}}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

Ma α è l'angolo tra la retta tangente al profilo della pedana e l'asse delle ascisse (vedi figura 5) quindi:

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$$

Ricordando che[2]:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}$$

Sostituendo nella (1) troviamo:

$$d = \frac{1}{\cos\alpha} + f(x)$$

$$d = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} + f(x)$$

Sappiamo già dal punto 2 che:

$$\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

Quindi:

$$d = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + \sqrt{2} - \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sqrt{2}$$

d non dipende da *x* quindi si mantiene costante durante il moto.

[2] $\frac{1}{cos^2\alpha} = \frac{sin^2\alpha + cos^2\alpha}{cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1$

Punto 4

Dobbiamo trovare le tangenti nei punti $-\frac{ln}{2}$ e $\frac{ln3}{2}$ e determinare l'angolo che formano.
Consideriamo la derivata prima:

$$f'(x) = -\frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Tangente alla curva nel punto $-\frac{ln3}{2}$:

$$y = f'\left(-\frac{ln3}{2}\right)\left(x + \frac{ln3}{2}\right)$$

$$f'\left(-\frac{ln3}{2}\right) = -\frac{e^{-\frac{ln3}{2}} - e^{\frac{ln3}{2}}}{2} =$$

$$= -\frac{e^{\left(ln\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}} - e^{(ln3)^{\frac{1}{2}}}}{2} = -\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}}}{2} = -\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{2} = -\frac{\frac{1-3}{\sqrt{3}}}{2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Equazione della retta tangente:

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{ln3}{2\sqrt{3}}$$

Angolo con l'asse delle ascisse:

$$\alpha = arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Tangente alla curva nel punto $\frac{ln3}{2}$:

$$y = f'\left(\frac{ln3}{2}\right)\left(x - \frac{ln3}{2}\right)$$

$$f'\left(\frac{ln3}{2}\right) = -\frac{e^{\frac{ln3}{2}} - e^{-\frac{ln3}{2}}}{2} =$$

$$= -\frac{e^{(ln3)^{\frac{1}{2}}} - e^{\left(ln\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}}{2} = -\frac{3^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}{2} = -\frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = -\frac{\frac{3-1}{\sqrt{3}}}{2} =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Equazione della retta tangente:

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{ln3}{2\sqrt{3}}$$

Angolo con l'asse delle ascisse:

$$\beta = arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 5\frac{\pi}{6}$$

Le due tangenti formano un angolo pari a:

$$\beta - \alpha = 5\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 4\frac{\pi}{6} = 2\frac{\pi}{3} = 120°$$

Il poligono regolare che presenta angoli di 120° è l'esagono. Le ruote, in questo caso, sono esagoni regolari.

Matilde Consales