**Problema 2**
Consideriamo la funzione $f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, periodica di periodo *T=4* il cui grafico, nell'intervallo [0; 4] è il seguente:

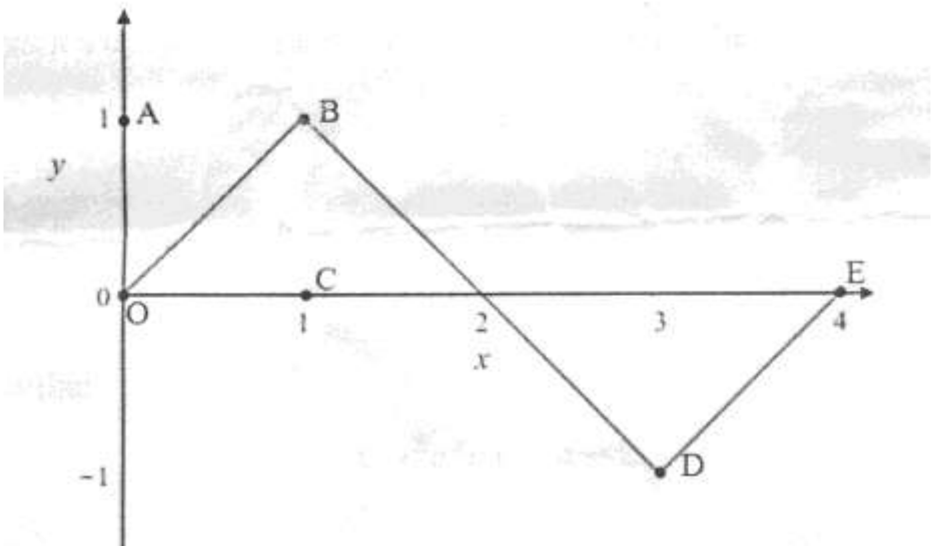

Figura 1

Come si evince dalla figura 1, i tratti OB, BD, DE del grafico sono segmenti i cui estremi hanno coordinate: $O(0,0), B(1,1), D(3,-1), E(0,4)$.

1) Stabilisci in quali punti del suo insieme di definizione la funzione $f$ è continua e in quali tratti è derivabile e verifica l'esistenza dei limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Qualora esistano, determinane il valore.
Rappresenta inoltre, per $x \in [0;4]$, i grafici delle funzioni:

$$g(x) = f'(x)$$

$$h(x) = \int_0^x f(t)dt$$

2) Considera la funzione

$$s(x) = \sin(bx)$$

Con $b$ costante reale positiva; determina $b$ in modo che *s(x)* abbia lo stesso periodo di *f(x)*. Dimostra che la porzione quadrata di piano *OABC* in figura 1 viene suddivisa dai grafici di *f(x)* e *s(x)* in 3 parti distinte e determina la probabilità che un punto preso a caso all'interno del quadrato *OABC* ricada in ciascuna delle parti individuate.

3) Considerando ora le funzioni:

$$f(x)^2 \quad e \quad s(x)^2$$

Discuti, anche con argomentazioni qualitative, le variazioni (in aumento o in diminuzione) dei 3 valori di probabilità determinati al punto precedente.

4) Determina infine il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse $y$ della porzione di piano compresa tra il grafico della funzione $h$ per $x \in [0;3]$ e l'asse delle *x*.

## Svolgimento

## Punto 1

La funzione *f(x)* è costituita da tratti di rette. Consideriamo i vari intervalli e troviamo le equazioni delle rette sostituendo gli opportuni valori all'equazione di una generica retta passante per due punti:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}$$

- $0 \le x < 1$ retta passante per i punti $O(0,0)$ $e$ $B(1,1)$

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-0}{1-0} \quad \rightarrow \quad y=x$$

- $1 \le x < 3$ retta passante per i punti $B(1,1)$ $e$ $D(3,-1)$

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-1}{-1-1} \quad \rightarrow \quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-2} \quad \rightarrow \quad y=-x+2$$

- $1 \le x \le 4$ retta passante per i punti $\mathrm{D}(3,-1)$ $e$ $E(4,0)$

$$\frac{x-3}{4-3}=\frac{y-(-1)}{0-(-1)} \quad \rightarrow \quad \frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{1} \quad \rightarrow \quad y=x-4$$

$$f(x)=\begin{cases} x & se \quad 0 \le x < 1 \\ -x+2 & se \quad 1 \le x < 3 \\ x-4 & se \quad 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

La funzione è continua negli intervalli [0;1), (1;3) e (3;4]. Dobbiamo verificare che sia continua nei punti 1 e 3. Consideriamo il punto *x=1*:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (-x+2) = 1$$

I limiti destro e sinistro esistono finiti ed assumono lo stesso valore quindi la funzione è continua per *x=1*. Consideriamo il punto *x=3*:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (-x+2) = -1$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (x-4) = -1$$

La funzione è continua anche per *x=3*.
*f(x)* è continua per $x \in [0,4]$. Inoltre, poiché $f(0)=f(4)=0$, è continua per periodicità per $x \in \mathcal{R}$.
La funzione è derivabile negli intervalli [0;1), (1;3) e (3;4].

$$g(x)=f'(x)=\begin{cases} 1 & se \quad 0 \le x < 1 \\ -1 & se \quad 1 \le x < 3 \\ 1 & se \quad 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

Non è derivabile per $x=1$ e per $x=3$. Inoltre, poiché $f'_+(0) = f'_-(4) = 1$, è derivabile per periodicità in $x=4$. La funzione data è derivabile nell'insieme $\mathcal{R}\backslash\{2k+1\ con\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}$
Il limite:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

Non esiste perché la funzione oscilla tra i due valori -1 e 1.
Invece:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Perché

$$|f(x)| \leq 1$$

Quindi:

$$\lim_{x\to+\infty} \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Grafico di $g(x)$

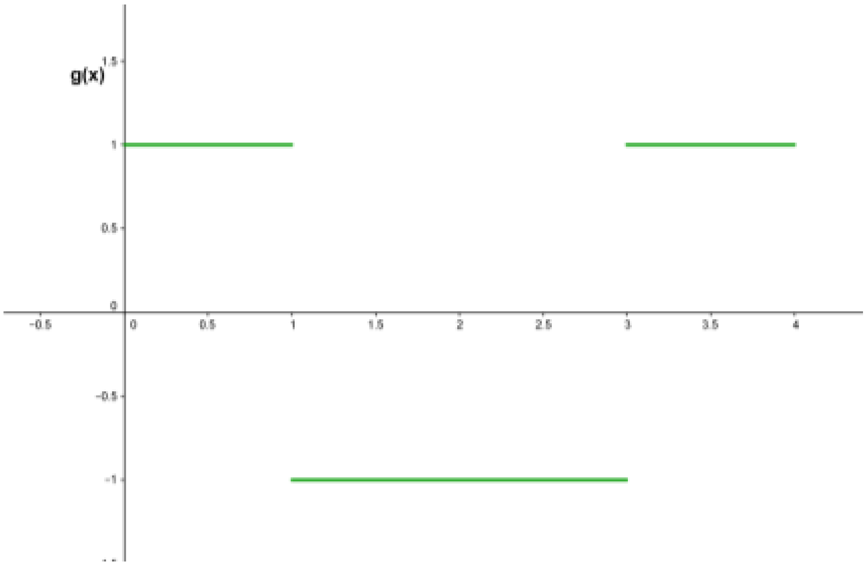


**Figura 2**

Determiniamo la funzione $h(x)$.

- $0 \leq x < 1$

$$h(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}$$

- $1 \leq x < 3$

$$h(x) = \int_1^x (-t+2)dt = -\frac{t^2}{2} + 2t\Big|_1^x = -\frac{x^2}{2} + 2x + \frac{1}{2} - 2 = -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2} + k$$

Dobbiamo trovare $k$ tale che:

$$-\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2} + k = \frac{x^2}{2} \quad per\ x = 1$$

$$-\frac{1}{2}+2-\frac{3}{2}+k=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{-1+4-3-1}{2}=-k \quad \rightarrow \quad k=\frac{1}{2}$$

$$h(x)=-\frac{x^2}{2}+2x-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{x^2}{2}+2x-1$$

- $3 \leq x < 4$

$$h(x)=\int_3^x (t-4)dt=\frac{t^2}{2}-4t\Big|_3^x=\frac{x^2}{2}-4x-\frac{9}{2}+12+k=\frac{x^2}{2}-4x+\frac{15}{2}+k$$

Dobbiamo trovare *k* tale che:

$$\frac{x^2}{2}-4x+\frac{15}{2}+k=-\frac{x^2}{2}+2x-1 \quad per\ x=3$$

$$\frac{9}{2}-12+\frac{15}{2}+k=-\frac{9}{2}+6-1 \quad \rightarrow \quad k=\frac{-9+24-15-9+12-2}{2}=\frac{1}{2}$$

$$h(x)=\frac{x^2}{2}-4x+\frac{15}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x^2}{2}-4x+8$$

Inoltre:

$$h(0)=h(4)=0$$

quindi *h(x)* è periodica di periodo 4 e per $x \in [0,4]$ si trova

$$h(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2} & per\ \ 0 \leq x < 1 \\ -\frac{x^2}{2}+2x-1 & per\ \ 1 \leq x < 3 \\ \frac{x^2}{2}-4x+8 & per\ \ 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Facciamo il grafico:

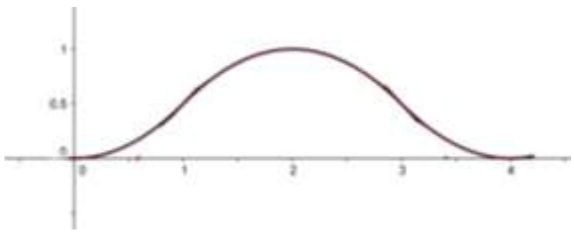


**Figura 3**

## Punto 2

Affinché *s(x)* abbia lo stesso periodo di *f(x)* deve essere:

$$s(x+4) = s(x) \quad \rightarrow \quad \sin(bx+4b) = \sin(bx)$$

Ricordando che il periodo di *sinx* è *2π* si trova:

$$4b = 2\pi \quad \rightarrow \quad b = \frac{\pi}{2}$$

Quindi:

$$s(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

Per disegnare la porzione quadrata di piano OABC e trovare le probabilità richieste. Calcoliamo i valori delle due funzioni agli estremi dell'intervallo:

$$f(0) = 0 \quad s(0) = 0$$

$$f(1) = 1 \quad s(1) = 1$$

Entrambe sono monotone crescenti e $s(x) \geq f(x)$ per $x \in [0,1]$.

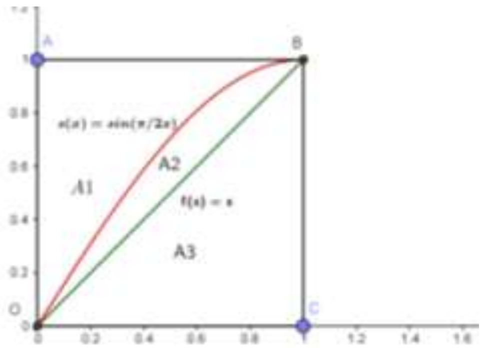


**Figura 4**

Le probabilità richieste sono date dalla relazione:

$$p_i = \frac{Area_{A_i}}{Area_{ABCO}} \quad con\ i = 1,2,3$$

$$Area_{ABCO} = 1$$

Dalla figura vediamo che:

$$Area_{A_3} = \frac{\overline{OC} \cdot \overline{BC}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$Area_{A_1} = 1 - \int_0^1 sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = 1 + \frac{cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\frac{\pi}{2}}\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{2}{\pi}$$

$$Area_{A_2} = Area_{ABCO} - Area_{A_3} - Area_{A_1} = 1 - \frac{1}{2} - 1 + \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}$$

Le probabilità cercate sono:

$$p_1 = 1 - \frac{2}{\pi}, \qquad p_2 = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}, \qquad p_3 = \frac{1}{2}$$

## Punto 3

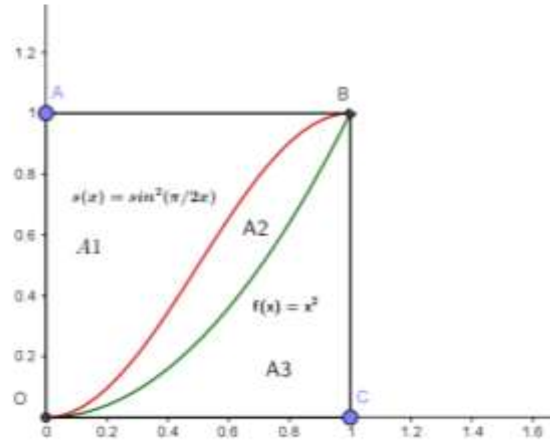


Figura 5

Dal confronto tra la figura 4 e la figura 5 si vede che le aree $A_1$ e $A_2$ sono aumentate mentre l'area $A_3$ è diminuita. Le probabilità seguono lo stesso andamento. Possiamo verificarlo facendo i calcoli.

$$Area_{A_3} = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$Area_{A_1} = 1 - \int_0^1 sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx =$$

Calcoliamo l'integrale per parti:

$$u = sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \qquad v = \frac{-cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\frac{\pi}{2}}$$

$$du = \frac{\pi}{2} cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \qquad dv = sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

$$\int sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = -\frac{2}{\pi} sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2} \int cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi} sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \int \left[1 - sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right] dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi} sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + x - \int sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

Risolviamo l'equazione

$$\int sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = -\frac{2}{\pi} sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + x - \int sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

$$2\int sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = -\frac{2}{\pi} sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + x$$

$$\int sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{\pi} sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + x\right]$$

$$\int sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = -\frac{1}{\pi}sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{x}{2}$$

Quindi:

$$Area_{A_1} = 1 - \left[-\frac{1}{\pi}sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{x}{2}\right]\Bigg|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Calcoliamo l’ultima area:

$$Area_{A_2} = 1 - Area_{A_1} - Area_{A_3} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{6-3-2}{6} = \frac{1}{6}$$

E le probabilità:

$$p_1 = \frac{1}{2}, \qquad p_2 = \frac{1}{6}, \qquad p_3 = \frac{1}{3}$$

## Punto 4

Riscriviamo l'equazione di $h(x) per x \in [0,3]$:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & per\ \ 0 \le x < 1 \\ \\ -\dfrac{x^2}{2} + 2x - 1 & per\ \ 1 \le x < 3 \end{cases}$$

Dobbiamo determinare il volume del solido generato dalla rotazione intorno all'asse delle ordinate. Per capire che solido si genera intersechiamolo con un piano con y costante.

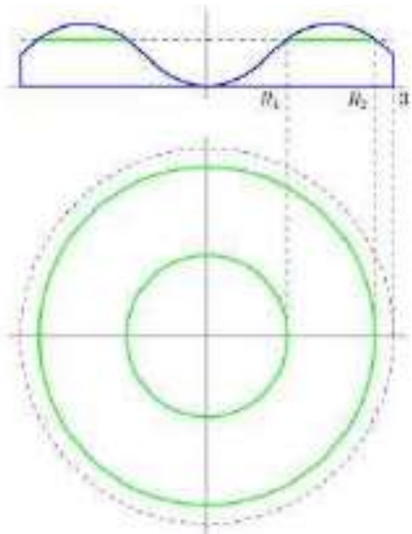

Figura 6

Consideriamo il primo pezzo:

y varia tra 0 $e\ \frac{1}{2}$ Quando $y = 0\ x = 3$ quando $0 < y < \frac{1}{2}\, x$ si trova dalla relazione:

$$y = \frac{x^2}{2} \quad \rightarrow \quad x^2 = 2y \quad \rightarrow x = \pm\sqrt{2y}$$

Ma allora la parte di solido che stiamo considerando ha come base la "ciambella" formata da due cerchi di raggi pari a 3 $e$ $\sqrt{2y}$. L'area di base, quindi, vale:

$$Area_{base} = \pi \cdot 3^2 - \pi \cdot \left(\sqrt{2y}\right)^2 = \pi(9 - 2y)$$

Abbiamo già visto che l'altezza varia tra 0 $e\ \frac{1}{2}$ possiamo calcolare il volume:

$$V_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \pi(9 - 2y)dy = \pi\left(9y - 2\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}\right) = \pi\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{4}\right) = \pi\frac{18 - 1}{4} = \frac{17}{4}\pi$$

Consideriamo il secondo pezzo:

y varia tra $\frac{1}{2}$ $e$ 1 troviamo $x$ dalla relazione

$$y = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1$$

$$x^2 - 4x + 2 + 2y = 0$$

$$x_{1-2} = 2 \pm \sqrt{4 - 2 - 2y} = 2 \pm \sqrt{2 - 2y}$$

Il solido di cui dobbiamo trovare il volume ha come base la “ciambella” formata da due cerchi di raggi pari a $2 - \sqrt{2 - 2y}\ \ e\ \ 2 + \sqrt{2 - 2y}$. Troviamo l’area di base:

$$Area_{base} = \pi \cdot \left(2 + \sqrt{2 - 2y}\right)^2 - \pi \cdot \left(2 - \sqrt{2 - 2y}\right)^2 =$$

$$= \pi\left(4 + 4\sqrt{2 - 2y} + 2 - 2y - 4 + 4\sqrt{2 - 2y} - 2 + 2y\right) =$$

$$= 8\pi\sqrt{2 - 2y}$$

L’altezza varia tra $\frac{1}{2}$ $e$ 1 possiamo calcolare il volume:

$$V_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(8\pi\sqrt{2 - 2y}\right) dy = 8\pi \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{2 - 2y}\, dy =$$

Procediamo per sostituzione:

$$t = 2 - 2y \quad dt = -2dy \quad dy = -\frac{dt}{2}$$

$$se\ y = \frac{1}{2} \quad t = 1 \quad se\ y = 1 \quad t = 0$$

$$= -\frac{1}{2} 8\pi \int_{1}^{0} \sqrt{t}\, dt = -4\pi \frac{2}{3}\sqrt{t^3}\Bigg|_{1}^{0} = \frac{8}{3}\pi$$

Il volume richiesto vale:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{17}{4}\pi + \frac{8}{3}\pi = \frac{51 + 32}{12}\pi = \frac{83}{12}\pi$$


Matilde Consales