Quesito 10

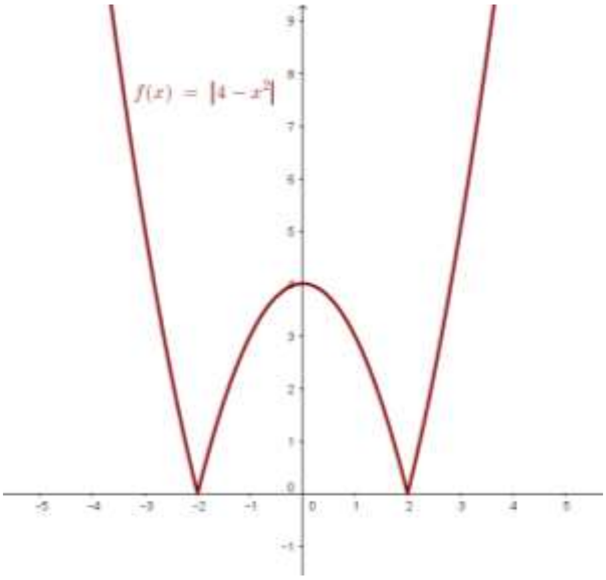
Data la funzione

$$f(x) = |4 - x^2|$$

Verificare che essa non soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo *[-3, 3]* e che comunque esiste un punto nell'intervallo *[-3, 3]* in cui la derivata prima di *f(x)* si annulla.
Questo esempio contraddice il teorema di Rolle? Motivare la risposta.

Svolgimento

Facciamo il grafico:



Poiché:

$$4 - x^2 \geq 0 \quad se \quad -2 \leq x \leq 2$$

Possiamo scrivere:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & se \quad x \leq -2 \\ -x^2 + 4 & se \quad -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & se \quad x \leq -2 \end{cases}$$

Ricordiamo adesso il teorema di Rolle:

se y=f(x) è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato [a, b], derivabile in (a, b) e tale che f(a) = f(b) allora esiste un punto c appartenente ad [a, b] tale che f '(c)=0

La funzione data non è derivabile nell'intervallo *(-3, 3)* infatti presenta punti angolosi per $x = \pm 2$ essendo:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & se \quad x \leq -2 \\ -2x & se \quad -2 \leq x \leq 2 \\ 2x & se \quad x \leq -2 \end{cases}$$

e

$$\lim_{x \to -2^-} f'(x) = \lim_{x \to -2^-} 2x = 4$$

$$\lim_{x \to -2^+} f'(x) = \lim_{x \to -2^+} (-2x) = -4$$

$$\lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{x \to 2^-} (-2x) = -4$$

$$\lim_{x \to 2^+} f'(x) = \lim_{x \to 2^+} 2x = 4$$

La funzione data. Quindi, non soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo *[-3, 3]*.

Possiamo, però, trovare un $c \in [-3, 3]$ tale che $f'(c) = 0$. Si vede, infatti che $f'(0) = 0$. Questo fatto non contraddice il teorema di Rolle perché le condizioni dettate dal teorema:

- Funzione continua in un intervallo *[a, b]*;
- Funzione derivabile in *(a, b)*;
- *f(a) = f(b)*

sono sufficienti ma non necessarie per l'esistenza del punto *c*.

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales