Quesito 2

Una torta di forma cilindrica è collocata sotto una cupola di plastica di forma semisferica. Dimostrare che la torta occupa meno dei $\frac{3}{5}$ del volume della semisfera.

Svolgimento

Facciamo un disegno:

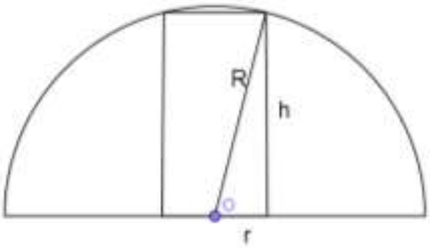

Figura 1

Troviamo il volume della torta (rappresentata dal cilindro):

$$V_{torta} = \pi r^2 h$$

Dove r è il raggio della base del cilindro e h è la sua altezza (vedi figura 1).
Esprimiamo il raggio del cilindro in funzione della sua altezza e del raggio del contenitore (la semisfera) per mezzo del teorema di Pitagora:

$$r^2 = R^2 - h^2$$

Sostituendo otteniamo una funzione nella variabile h:

$$V_{torta}(h) = \pi(R^2 - h^2)h = \pi R^2 h - \pi h^3 \qquad (1)$$

Calcoliamo la derivata prima:

$$V'_{torta}(h) = \pi R^2 - 3\pi h^2$$

Vediamo se ammette un punto di massimo:

$$\pi R^2 - 3\pi h^2 \geq 0 \qquad \rightarrow \qquad R^2 - 3h^2 \geq 0$$

$$h^2 \leq \frac{R^2}{3}$$

Questa disequazione è verificata per:

$$-\frac{R}{\sqrt{3}} \leq h \leq \frac{R}{\sqrt{3}}$$

E la funzione in questo intervallo è crescente. Quindi per

$$h = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

si ha un massimo. Calcoliamo il volume massimo della torta usando la (1):

$$V_{torta\,Max} = V_{torta}\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) = \pi R^2 \frac{R}{\sqrt{3}} - \pi \left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)^3 =$$

$$= \pi \frac{R^3}{\sqrt{3}} - \pi \frac{R^3}{3\sqrt{3}} = \frac{3\pi R^3 - \pi R^3}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi R^3}{3\sqrt{3}}$$

Il volume del contenitore (semisfera) è dato da:

$$V_{contenitore} = \frac{2}{3}\pi R^3$$

A questo punto dobbiamo verificare se:

$$V_{torta\ Max} < \frac{3}{5} V_{contenitore}$$

Sostituiamo i valori trovati:

$$\frac{2\pi R^3}{3\sqrt{3}} < \frac{3}{5}\frac{2}{3}\pi R^3$$

Semplificando:

$$\frac{1}{3\sqrt{3}} < \frac{1}{5}$$

Questa disuguaglianza è verificata infatti:

$$0.19 < 0.2$$

Matilde Consales